УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ

МАГИСТАРСКИ РАД

КРЕТАЊЕ КЛАСИЧНЕ СТРУНЕ
У ЗАКРИВЉЕНОМ ПРОСТОРВРЕМЕНУ

Студент: Марко Војиновић
Ментор: др Милован Василић

Београд, 2006.

Садржај

Апстракт

Mathisson-Papapetrouов метод је оригинално осмишљен за извођење једначине кретања честице из коваријантног очувања њеног тензора енергије–импулса. Тај метод се генералише на екстендиране објекте, као што је струна. Без задавања типа материје од које се струна састоји, добијају се како једначине кретања тако и гранични услови струне. Испоставља се да су једначине светске површи општије него познате једначине минималне површи. Конкретно, зависе од унутрашње структуре струне. Релевантни случајеви су класификовани анализирањем канонских облика ефективног дводимензионалног тензора енергије–импулса. Показује се да случај хомогено дистрибуиране материје са тензијом која је једнака густини енергије дефинише познату Nambu-Goto динамику. Преостала три случаја садрже физички релевантне масивне и безмасене струне, и нефизичке тахионске струне.

Abstract

The Mathisson-Papapetrou method is originally concieved for derivation of the particle equation of motion from the covariant conservation of its stress–energy tensor. This method is generalized to extended objects, such as a string. Without specifying the type of matter the string is made of, one obtains both the equations of motion and boundary conditions of the string. The world sheet equations turn out to be more general than the familiar minimal surface equations. In particular, they depend on the internal structure of the string. The relevant cases are classified by examining canonical forms of the effective 2-dimensional stress–energy tensor. The case of homogeneously distributed matter with the tension that equals its mass density is shown to define the familiar Nambu-Goto dynamics. The other three cases include physically relevant massive and massless strings, and unphysical tachyonic strings.

Предговор

Одређивање путање којом се тела крећу кроз простор један је од најстаријих задатака физике. Још из времена Newtona, уводи се појам тачкасте честице (као малог тела чије димензије нису важне за његово кретање), постулира се кретање *слободне* честице (први Newtonов закон), и постулира се једначина динамике која описује кретање честице под утицајем спољашњих сила (други Newtonов закон). Свака физичка теорија која изучава кретање честица зове се *механика*. Тако на пример данас знамо за класичну механику, релативистичку механику, квантну механику, релативистичку квантну механику и сл. Притом је за нас овде важно нагласити да се једначине кретања честице у механици *постулирају*, на основу експерименталних посматрања. Конкретно, у класичној механици се *постулира* да се слободна честица креће по правој линији константном брзином.

У одређеним моментима развоја физике појавила се потреба за увођењем нове парадигме у опис природних феномена, јер се испоставило да постоје појаве које се не могу успешно описати моделом скупа честица које делују једне на друге силама[1]. Уведен је нов концепт описивања природе, у коме је централни објекат који се посматра *поље*, ентитет који постоји у свим тачкама просторвремена и у свакој тачки има одређену "вредност". Све физичке појаве се описују као последице особина и динамике поља (једног или више њих), и постулирају се нове *једначине кретања поља*, које описују динамику сваког поља понаособ и њихове међусобне интеракције. Теорије саграђене на овакав начин зову се *теорије поља*. Теорија поља такође има пуно, како класичних тако и квантних, релативистичких, итд.

Иако је теорија поља као метод веома успешна у опису природних појава, нетривијалан је проблем њеног односа са механиком. Наиме, поље у себи садржи концепт *континуума*, и није очигледно како из тог континуума изградити *дискретне*, *тачкасте* честице које у природи опажамо. Овај проблем се у извесној мери може заобићи увођењем "хибридне" теорије која спаја механику са теоријом поља, и која садржи како поља и постулате који описују њихову динамику, тако и честице и њихове постулате из механике. Притом се интеракција поља са честицама такође постулира, на основу експерименталних искустава. Ово је међутим прилично вештачка конструкција, како због великог броја ad hoc постулата, тако и због одустајања од јединственог описа физике и "мешања" објеката различите природе. Алтернатива овом приступу са-

[1] Једна од основних појава која се не може тако описати је нпр. процес креације или анихилације честица.

стоји се у идеји да се честице опишу као специфична, "добро локализована" решења у чистој теорији поља, тзв. *кинк*-решења, или *кинкови*. Описно речено, кинк је једно решење једначина поља где је поље различито од вакуумске вредности само у једној, "малој", области простора. Та област простора се онда апроксимативно сматра тачкастом, и говоримо о *честици*. Еволуција тог решења је задата такође једначинама поља, и уколико је кинк-структура стабилна (тј. уколико се кинк не распадне, бар неко време), можемо говорити о *кретању честице*. У апроксимацији тачкастог кинка можемо говорити о *трајекторији*, тј. путањи честице. Пошто је та путања у основи одређена једначинама поља од којих се кинк састоји, у принципу се отвара могућност да се једначине кретања честице, које се у механици *постулирају*, сада *изведу* из одговарајућих једначина поља, као апроксимативне *ефективне* једначине кретања тачкастог кинка. Притом, наравно, a priori нема никаквих гаранција да ће те ефективне једначине кретања одговарати онима које се постулирају у механици.

Уочавање потребе за оваквим приступом појавило се са утемељењем опште теорије релативности, која је описивала гравитацију као појаву закривљености просторвременског континуума. Наиме, питање кретања честице у спољашњем гравитационом пољу је постало нетривијално, јер појам "праволинијског кретања слободне честице" више није био дефинисан, будући да у закривљеном просторвремену не постоје праве линије. На ово питање се могло одговорити уопштавањем појма "праве линије" на геодезијску линију, али је за то поново било неопходно правити "хибридну" теорију механичке тачкасте честице и гравитационог поља, чиме се геодезијска трајекторија честице ефективно опет постулирала, на бази принципа еквиваленције и постулата о праволинијском кретању честице у специјалној теорији релативности. Овакав приступ, осим што није леп, има и одређених проблема у гравитацији, којој не "прија" појам тачкастог масивног објекта. Сем тога, са развојем гравитације као локално градијентне теорије поља појавила се структура Riemann-Cartanовог просторвремена које осим кривине садржи и торзију. У таквом просторвремену разликујемо *две* карактеристичне линије, аутопаралелу и екстремалу, и обе се могу сматрати генерализацијом праве линије из равног просторвремена. Притом, не постоји нити јасан теоријски критеријум нити било какав експериментални резултат који би разјаснио куда се честица заправо креће. Дакле, у том случају "хибридни" метод је нејезнозначан.

Оваква ситуација је указивала на потребу описивања честице чистом теоријом поља, и проблемом проналажења ефективних једначина кретања су се бавили још Einstein, Infeld, Hoffman, Mathisson, Papapetrou и други [12, 13, 14, 15, 16, 17]. Конзистентно, донекле систематско и свакако успешно решење проблема дао је Papapetrou [13], а затим су уследила и уопштења на просторе са торзијом [20, 21].

На другом фронту физике, у покушајима да се објасни понашање мезонских резонанци у физици јаких интеракција, а касније у покушајима да се изврши унификација свих интеракција и направи "теорија свега", развила се *теорија струна*, са релативно радикалном идејом замене честице као тачкастог објекта новим, једнодимензионалним елементарним објектом, *струном*. Као један од првих корака у изградњи теорије, формулисана је *механика класичне релативистичке бозонске струне*

[1, 2], односно постулиране су једначине кретања за слободну струну. Затим је направљена (како класична, тако и квантна) теорија поља струна, и постулирана је "хибридна" теорија која описује кретање једне струне у спољашњем пољу струна [3, 4, 5, 6]. У овако направљеној теорији, појављују се како гравитационо поље $g_{\mu\nu}$, тако и Kalb-Ramondово антисиметрично тензорско поље $B_{\mu\nu}$ и дилатонско скаларно поље Φ, која интерагују са "механичком" струном. Анализа једначина кретања и интеракције струне са тим пољима указује на то да се поље $g_{\mu\nu}$ може повезати са закривљеношћу просторвремена (што је био очекиван резултат), али и на то да поље $B_{\mu\nu}$ има везе са *торзијом* просторвремена, док дилатон Φ има везе са *неметричношћу* [7, 8, 9, 10, 11]. Разуме се, као и у свакој "хибридној" теорији, једначине динамике струне у овим пољима се постулирају, на основу неких мање или више плаузабилних аргумената.

Оваква ситуација указује на потребу да се проблему кретања струне у овим пољима приступи са становишта чисте теорије поља, односно да се Papapetrouов метод за честицу генералише на екстендиране објекте, а затим да се из одговарајуће теорије поља изведу ефективне једначине кретања за кинк-решење у облику струне. Затим би се те ефективне једначине упоредиле са оним познатим, постулираним једначинама, што отвара могућност како оправдавања тог постулата, тако и евентуалне манифестне геометријске интерпретације поља $B_{\mu\nu}$ и Φ, која је засад само наговештена постулираним дејством.

Наравно, Papapetrouов метод, који решава одговарајући проблем за случај честице, не пружа очигледан пут ка уопштавању на случај струне, или других екстендираних објеката. Па ипак, могућност уопштења постоји [18], и представља централну тему овог рада.

Будући да је извођење једначина кретања струне у закривљеном простору са торзијом (и евентуално неметричношћу) технички компликовано, ограничићемо се на случај чистог Riemannовог простора (дакле са кривином, без торзије и неметричности).

План излагања је следећи. У првој глави наводимо кратку рекапитулацију познатих резултата о кретању честице и струне у кривом простору. Почињемо кратким описом опште теорије релативности, набрајамо релевантне једначине и формулишемо лагранжијан слободне теорије гравитационог поља. Затим разматрамо кретање механичке честице у таквом пољу, конструишемо одговарајућу "хибридну" теорију, и дискутујемо њене особине. Након тога разматрамо кретање механичке струне у истом пољу и конструишемо "хибридну" теорију и за њу. Напокон, формулишемо "чисту" теорију гравитационог поља и поља материје, и дајемо општи облик лагранжијана који ћемо надаље користити. Део лагранжијана који описује поља материје не задајемо експлицитно, јер нас не интересује ниједна конкретна теорија поља, већ радимо општи случај било које теорије која задовољава нашу основну претпоставку, тј. која садржи локализована кинк-решења.

У другој глави излажемо главне резултате. Почињемо са дискусијом "хибридне" теорије кретања једне струне у спољашњим пољима $g_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ и Φ, и образлажемо мотивацију за приступ из угла чисте теорије поља. Затим демонстрирамо Papapetrouов метод за извођење једначина кретања релативистичке тачкасте честице у спољашњем гравитационом пољу. Метод је притом преписан у формализму развоја по Diracовим δ функцијама, који нам даје технички оквир за генерализацију на екстендиране објекте. Дискутују се претпоставке које су неопходне за кинк-решење, а затим се из коваријантног очувања тензора енергије–импулса материје изводи геодезијска једначина кретања тачкасте честице. Резултати се упоређују са приступом из прве главе, и коментаришу се предности метода. Након тога пажња се посвећује генерализацији Papapetrouовог метода на случај струне. Најпре се разматрају претпоставке неопходне за постојање кинк-решења у облику струне, а затим се из коваријантног очувања тензора енергије–импулса изводи основни резултат — опште једначине кретања струне и одговарајући гранични услови. Они се затим упоређују са постулираним једначинама из прве главе. Уочава се значај масеног тензора m^{ab} који се интерпретира као ефективни дводимензионални тензор енергије–импулса струне. Следећи корак представља анализу могућих канонских облика масеног тензора, чиме се класификују могући типови струна. Испоставља се да је Nambu-Gotoова струна само један од читавог спектра могућих типова. Следе примери радикално нехомогене струне где је сва материја струне концентрисана у једној тачки, и Nielsen-Olesen flux-tube решења у скаларној електродинамици Higgsовог типа. Овим другим примером се показује да заиста постоје реалистичне теорије поља материје која поседују кинк-решења у облику струне, као и да задовољавају опште једначине кретања изведене генерализацијом Papapetrouовог поступка. Након тога се укратко разматра могућност формулисања лагранжијана за те опште ефективне једначине кретања и доказује се да се у општем случају дејство *не може* формулисати без употребе помоћних варијабли. Коначно, читав метод извођења једначина кретања се генералише на случај екстендираних објеката са више димензија, и наводе се ефективне једначине кретања и гранични услови за p-брану у спољашњем закривљеном D-димензионалном просторвремену.

Следи закључак у коме се рекапитулирају резултати, дају закључне напомене и наводе даљи могући правци истраживања.

На крају се налазе два математичка додатка. Први се бави формализмом развоја задате функције у ред по изводима Diracове δ функције, који је неопходан за уопштавање Papapetrouовог метода. Други се бави Stokesовом теоремом у D димензија, која се користи при извођењу граничних услова за струну и p-брану. Иза тога се наводи списак литературе.

Желим да се захвалим свом ментору, др Миловану Василићу, на вођењу и помоћи у свим аспектима писања овог рада, од избора теме преко разматрања концептуалних питања до савета техничког карактера.

Конвенције којих се држимо у раду су следеће. Грчки индекси са средине алфабета, $\mu, \nu, \ldots$, су просторвременски индекси и узимају вредности $0, 1, \ldots, D-1$. Грчки индекси са почетка алфабета, $\alpha, \beta, \ldots$, узимају само просторне вредности $1, 2, \ldots, D-1$. Латински индекси $a, b, c, \ldots$, су индекси светске површи и у случају струне узимају две вредности, 0 и 1, док у случају p-бране узимају вредности

$0, 1, \ldots, p$. Просторвременске и координате на светској површи обележавамо редом са x^μ и ξ^a, док се одговарајући метрички тензори означавају са $g_{\mu\nu}(x)$ и $\gamma_{ab}(\xi)$. Сигнатуре метричких тензора су $\mathrm{diag}[+1, -1, \ldots, -1]$. Углавном ћемо бити заинтересовани за физички релевантан случај $D = 4$, али (како ћемо показати при крају друге главе) сви резултати важе за произвољну вредност димензије просторвремена.

Глава 1

ГРАВИТАЦИЈА И МАТЕРИЈА

1.1 Увод

Након револуције коју је у физику донела специјална теорија релативности, нова слика простора и времена отворила је и питање релативистичке формулације гравитационог поља, јер је Newtonов закон гравитације престао да буде у складу са резултатом о константности брзине светлости и његовим последицама. Због тога је направљена општа теорија релативости, која заправо представља теорију релативистичког гравитационог поља.

Кретање тела у релативистички формулисаном гравитационом пољу је постало значајно већ због експерименталне провере те формулације. Наиме, прецесија Меркуровог перихела и слични експерименти су се могли објаснити релативистичким корекцијама Newtonовог закона гравитације, и били у сјајном складу са теоријом. Теорија је, међутим, имала неке концептуалне недостатке везане пре свега за чињеницу да тачкаста честица не може тако лако да се повеже са гравитационим пољем које је формулисано за материју која је континуирано дистрибуирана по простору. Но ипак, користећи принцип еквиваленције и познате једначине кретања тачкасте честице у равном, Minkowskijевом простору, могла се саградити одговарајућа "хибридна" теорија механике једне честице у гравитационом пољу, и једначине кретања које се одатле добијају лепо су описивале путање планета око Сунца и остале ефекте опште теорије релативности.

Много касније, са напретком теорије елементарних честица и описивањем микросвета, појавила се теорија струна. Изворна мотивација за увођење струна у физику честица дошла је из анализе мезонских резонанци. Како испада према експерименталним резултатима, познате резонанце, карактерисане моментом импулса J и масом M, задовољавају феноменолошко правило $J = \alpha M^2 + const$, где је α универзална константа. Ове зависности се зову Regge трајекторије.

Да би се објасниле Regge трајекторије, мезонске резонанце се посматрају као ексцитована везана стања два кварка. Испоставило се да релативистичка ротирајућа струна са лаким кварковима закаченим на својим крајевима заиста има особину $J = \alpha M^2 + const$. Струна је карактерисана тензијом T и нема друге структуре. Касније је схваћено да постоје и конфигурације теорије поља са оваквим особинама. На пример, у скаларној електродинамици постоји тзв. flux-tube решење једначина кретања које управо има особине Nambu-Gotoове струне [19].

Нова иницијатива за развој теорије струна настала је седамдесетих година прошлог века, када се испоставило да се у оквиру квантне теорије струна природно појављује гравитација, чиме се дошло на идеју да се струнама описују не хадронске резонанце, већ елементарне честице. Другим речима, теорија струна је постала један од могућих оквира за уједињење свих интеракција.

Иако и после тридесет година интензивног развоја ова теорија још увек нити је структурно затворена као целина нити има било какво експериментално предвиђање, ентузијазам за проналажење "теорије свега" помоћу теорије струна код многих физичара још увек не јењава. Притом се основна идеја састоји у томе да се честица, као тачкасти елеметарни објекат (из кога се гради све остало), замени струном, једнодимензионалним елементарним објектом.

Наравно. и струна је као и честица објекат дискретне природе, и природно се поставља питање кретања струне у гравитационом пољу на исти начин као у случају честице. Одговор је такође исти, заснован на "познатом" (тј. постулираном) кретању струне у равном Minkowskijевом просторвремену и принципу еквиваленције, који воде конструкцији одговарајуће "хибридне" теорије механике једне струне у гравитационом пољу. Иако ова теорија пати од истих недостатака као хибридна теорија за честицу, била је довољно добра за примену у истраживању, све до одређеног тренутка кад се указала озбиљнија потреба за анализом кретања струне у гравитационом пољу.

Прегледајмо зато укратко како се праве поменуте "хибридне" теорије честице и струне и које су њихове основне особине. Полазимо од фундамената релативистичке теорије гравитације, и увођења неких основних појмова неопходних за даља разматрања.

1.2 Општа теорија релативности

Општа теорија релативности настала је из потребе да се гравитационо поље описује на конзистентан начин у оквиру релативистичке физике. Кључан принцип релативистичке теорије гравитације зове се *принцип еквиваленције*, и тврди да се ефекти неинерцијалности референтног система на материју никаквим експериментом не могу локално разликовати од ефеката гравитационог поља на ту материју. Ово другим речима значи да у околини сваке тачке просторвремена постоји један (тзв. *слободно падајући*) референтни систем у коме сви закони физике[1] имају исти облик као у специјалној теорији релативности. Историјски, овај принцип је настао као уопштење Galileieвих експеримената који су показали да сва тела у гравитацио-

[1] Ово је формулација тзв. *јаког* принципа еквиваленције. Наредни исказ, везан за једнакост инерцијалне и гравитационе масе тела малих димензија представља тзв. *слаби* принцип еквиваленције.

ном пољу падају истим убрзањем, односно да је инерцијална маса сваког тела, m_i, једнака гравитационој маси тог тела, m_g.

Из оваквог приступа гравитацији израста геометријска интерпретација гравитационог поља. Наиме, гравитација се описује као појава закривљености просторвремена. Просторвреме се посматра као једна многострукост у којој је дефинисано растојање између две блиске тачке једначином

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu,$$

која представља генерализацију Питагорине теореме. Овде су x^μ координате прве тачке, $x^\mu + dx^\mu$ координате друге тачке, ds је растојање између њих, а $g_{\mu\nu}(x)$ је тзв. метрички тензор, који прецизира како се рачуна растојање, и зависи у општем случају од тачке x. Метрички тензор носи информацију о свим растојањима међу тачкама многострукости, и представља основну величину којом се описује гравитационо поље. Сигнатура метричког тензора је иста као сигнатура Minkowskijеве метрике, $\mathrm{diag}(+,-,-,-)$. Захваљујући овоме, у свакој тачки просторвремена постоји координатни систем у коме је $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$, што је потребан услов за принцип еквиваленције.

Уз помоћ метрике могу се конструисати тзв. коефицијенти конексије, преко Christoffelове формуле:

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right).$$

Овде је $g^{\lambda\rho}$ инверзни метрички тензор, а ∂_μ парцијални извод по координати x^μ. Коефицијенти конексије нису тензори, али имају веома важну улогу јер описују паралелно померање вектора из једне тачке у другу тачку, односно дају дефиницију концепта паралелности на кривој многострукости. Поред тога, коефицијенти конексије улазе у дефиницију коваријантног извода:

$$\nabla_\mu v^\nu(x) = \partial_\mu v^\nu(x) + \Gamma^\nu{}_{\rho\mu} v^\rho(x).$$

За разлику од ∂_μ који нарушава тензорски карактер величине на коју делује, коваријантни извод тензора остаје тензор. То је последица нетензорског карактера конексије $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$, који се комбинује са нетензорским карактером парцијалног извода ∂_μ тако да коваријантни извод тензора ипак буде тензор. Сем тога, захваљујући нетензорском закону трансформације конексије, у свакој тачки просторвремена постоји координатни систем у коме, осим што је $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, важи и $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = 0$. Такав координатни систем зове се *локално инерцијални*, односно *слободно падајући* координатни систем.

Користећи коефицијенте конексије можемо конструисати Riemannов тензор кривине:

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma{}_{\nu\rho} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\rho} \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}.$$

Тензор кривине садржи комплетну информацију о закривљености просторвремена, и интерпретира се као тензор јачине гравитационог поља, као што нпр. $F_{\mu\nu}$ представља тензор јачине електромагнетног поља. Преко њега се још уводе Riccijев тензор, $R_{\mu\nu} =$

$R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$, и скаларна кривина, $R = R^{\lambda\mu}{}_{\lambda\mu}$. Riemannов тензор кривине је, као што се види, нелинеарна функција метричког тензора и његових првих и других извода по координатама.

Све ове величине имају разноразне особине, међусобно су везане разним идентитетима, и представљају предмет изучавања диференцијалне геометрије. Ми се нећемо превише упуштати у све то, али ћемо на овом месту споменути два резултата. Први је тзв. Bianchijев идентитет:

$$\nabla_\lambda R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} + \nabla_\nu R^{\rho\sigma}{}_{\lambda\mu} + \nabla_\mu R^{\rho\sigma}{}_{\nu\lambda} = 0,$$

из кога контракцијама $\rho = \mu$, $\sigma = \lambda$ следи:

$$\nabla_\lambda \left(R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} R \right) = 0. \tag{1.1}$$

Други је идентитет за контракцију коефицијената конексије:

$$\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\mu} = \partial_\lambda \ln \sqrt{-g}, \tag{1.2}$$

где је $g = \det [g_{\mu\nu}]$ детерминанта метричког тензора.

Разуме се, први корак у конструкцији теорије гравитационог поља представља постулирање *дејства* којим се описује динамика гравитационог поља, и из кога варијационим принципом следе одговарајуће једначине динамике. Дејство слободног Einsteinовог гравитационог поља постулира се као:

$$S_G = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \, \sqrt{-g} R, \tag{1.3}$$

и варирањем по метрици следе Einsteinове једначине слободног гравитационог поља:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \tag{1.4}$$

Ово је систем од десет нелинеарних парцијалних диференцијалних једначина другог реда по десет непознатих функција $g_{\mu\nu}(x)$.

1.3 Честица у гравитационом пољу

Размотримо сада стандардни приступ кретању једне честице у гравитационом пољу. Пре свега, приметимо да једна честица (стандардно посматрано) по својој природи *није поље*, па приступамо конструкцији "хибридне" теорије гравитационог поља и тачкасте честице.

У специјалној теорији релативности постулира се дејство тачкасте честице као:

$$S = m \int ds = m \int d\tau \, \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{d\tau} \frac{dz^\nu}{d\tau}},$$

где се са z обележава положај честице, а m је њена маса. Варирањем дејства добијају се једначине кретања честице, и њихово опште решење је права линија. Сада, користећи *принцип еквиваленције* куплујемо честицу са спољашњим гравитационим пољем постулирајући дејство:

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\,\sqrt{-g}R + m\int d\tau\,\sqrt{g_{\mu\nu}(z)\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau}}. \tag{1.5}$$

Варирањем овог дејства по z добијамо геодезијску једначину (у којој смо стандардно изабрали да буде $\tau = s$),

$$\frac{d^2z^\mu}{ds} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\frac{dz^\nu}{ds}\frac{dz^\rho}{ds} = 0,$$

док варирањем по $g_{\mu\nu}$ добијамо Einsteinове једначине

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\,T_{\mu\nu},$$

са тачкастом честицом као извором гравитационог поља:

$$T^{\mu\nu} = m\int ds\,\frac{dz^\mu}{ds}\frac{dz^\nu}{ds}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta^{(4)}(x - z(s)). \tag{1.6}$$

Споменимо овде успут и неке недостатке оваквог приступа. "Хибридност" теорије се огледа у чињеници да је координата истовремено и варијабла и параметар у теорији. Варијабла је кад се разматра положај честице, док фигурише и као параметар у метрици $g_{\mu\nu}$, која је такође варијабла. Даље, геодезијско кретање честице је практично постулирано, на основу постулата о праволинијском кретању из специјалне теорије релативности, и принципа еквиваленције. Коначно, Einsteinове једначине поља са тачкастом материјом као извором имају за решење геометрију црне рупе око те тачкасте честице. Ово је незгодно, јер је тачка која представља положај честице сингуларна, па није јасно како у тој тачки израчунати метрички тензор који фигурише у једначини кретања честице. Другим речима, геометрија у којој је присутна црна рупа нема геодезијску линију дуж које би се кретао сингуларитет.

Напоменимо и то да ово није једини начин да се зада дејство честице. Може се, наиме, у оквиру специјалне релативности изабрати дејство

$$S = \frac{m}{2}\int d\tau\;\eta_{\mu\nu}\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau},$$

које се истоветном аргументацијом куплује са гравитацијом тако да даје:

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\,\sqrt{-g}R + \frac{m}{2}\int d\tau\;g_{\mu\nu}(z)\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau}.$$

Ово дејство (уз избор $\tau = s$) даје исте једначине кретања за честицу и гравитационо поље и исти израз за тензор енергије–импулса честице као и оно које смо малопре разматрали. Недостаци које смо коментарисали су такође исти. Оно што је различито је чињеница да ово дејство нема репараметризациону симетрију $\tau \to \tau' = f(\tau)$, и да је полиномијално. Полиномијалност умногоме олакшава разматрање квантизације честице, и због тога се у литератури често полази управо од њега.

1.4 Струна у гравитационом пољу

У класичној механици се честица замишља као бездимензиони, тачкаст објекат, који се описује положајем, тј. координатама тачке у којој се налази, и енергијом мировања (тј. масом), m. Како протиче време, честица се креће кроз простор, што се на просторвременском дијаграму види као линија[2], која се зове светска линија честице.

Теорија струна се базира на идеји да се честица као тачкаст елементарни објекат замени струном, једнодимензионалним објектом. Струна се описује својим положајем, тј. скупом координата свих тачака у којима се налази, и тзв. тензијом, T, која одговара подужној густини енергије струне. Како протиче време, струна се креће кроз простор, што се на просторвременском дијаграму види као површ[3], која се зове светска површ струне. По аналогији са честицом, постулира се [1, 2] да се слободна струна креће по екстремалној путањи у Minkowskijевом просторвремену, тј. постулира се тзв. Nambu-Gotoово дејство

$$S = T \int_{\mathcal{M}_2} d^2\xi \, \sqrt{-\gamma} = T \int_{\mathcal{M}_2} d^2\xi \, \sqrt{-\det\left(\eta_{\mu\nu}\frac{\partial z^\mu}{\partial \xi^a}\frac{\partial z^\nu}{\partial \xi^b}\right)},$$

и изводи се једначина кретања за струну. Решење ове једначине кретања је дводимензионална многострукост, $\mathcal{M}_2$, тј. површ задата параметарским једначинама $x^\mu = z^\mu(\xi^a)$, где су ξ^0 и ξ^1 параметри који пребројавају тачке на њој. Minkowskijевом метриком $\eta_{\mu\nu}$ се на површи индукује метрика

$$\gamma_{ab} = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial z^\mu}{\partial \xi^a}\frac{\partial z^\nu}{\partial \xi^b}, \qquad \gamma = \det\left[\gamma_{ab}\right],$$

која фигурише у дејству.

Овакво дејство је природна генерализација дејства за тачкасту честицу. Наиме, захтев да варијација дејства честице буде једнака нули заправо представља захтев да се честица креће по линији екстремалне дужине, јер је дејство пропорционално тој дужини. Код струне се задаје дејство које је пропорционално површини светске површи по којој се креће струна, па је захтев да варијација дејства буде нула еквивалентан захтеву да је површина светске површи екстремална. У том смислу се на одређен геометријски, интуитиван начин задаје динамика слободне струне по аналогији са честицом.

Коришћењем принципа еквиваленције, може се разматрати и кретање струне у гравитационом пољу. И овде се све постулира слично као код честице, чиме долазимо

[2] Ова линија није било каква, већ мора сећи сваку просторну хиперповрш тачно једанпут, јер се честица у сваком тренутку налази у тачно једној тачки простора. Ово између осталог значи да је линија једна бесконачна једнодимензионална многострукост, $\mathcal{M}_1$.

[3] Ова површ такође није било каква, већ и она мора сећи сваку просторну хиперповрш тачно једанпут, јер се струна у сваком тренутку налази на тачно једној линији (по претпоставци коначне дужине) у простору. Ово значи да је површ једна бесконачна дводимензионална многострукост, $\mathcal{M}_2$.

до дејства "хибридне" теорије:

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\,\sqrt{-g}R + T\int_{\mathcal{M}_2} d^2\xi\,\sqrt{-\det\left(g_{\mu\nu}(z)\frac{\partial z^\mu}{\partial\xi^a}\frac{\partial z^\nu}{\partial\xi^b}\right)}.$$

Варирањем по метричком тензору поново добијамо Einsteinове једначине, при чему сада на десној страни фигурише тензор енергије–импулса струне:

$$T^{\mu\nu} = T\int_{\mathcal{M}_2} d^2\xi\,\sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}\frac{\partial z^\mu}{\partial\xi^a}\frac{\partial z^\nu}{\partial\xi^b}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta^{(4)}(x - z(\xi)).$$

(Овде је сада γ_{ab} метрички тензор струне индукован метриком $g_{\mu\nu}(z)$.) Варирање дејства по z је међутим мало занимљивије, па га рачунамо детаљније. Уводећи ознаку $u_a^\mu \overset{\text{деф}}{=} \dfrac{\partial z^\mu}{\partial\xi^a}$ за генералисане брзине тј. тангентне векторе, имамо:

$$\begin{aligned}
\delta S &= T\int_{\mathcal{M}_2} d^2\xi\frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}\left[\left(\delta g_{\mu\nu}\right)u_a^\mu u_b^\nu + 2g_{\mu\nu}u_a^\mu\delta u_b^\nu\right] \\
&= T\int_{\partial\mathcal{M}_2} d\lambda\, n_b\,\sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}g_{\mu\nu}u_a^\mu\delta z^\nu + \\
&\quad + T\int_{\mathcal{M}_2} d^2\xi\left[\sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}u_a^\rho u_b^\sigma \Gamma^\mu{}_{\rho\nu}g_{\mu\sigma} - \frac{\partial}{\partial\xi^b}\left(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}g_{\mu\nu}u_a^\mu\right)\right]\delta z^\nu.
\end{aligned}$$

Захтев $\delta S = 0$ затим даје једначину кретања:

$$\frac{\partial}{\partial\xi^a}\left(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}u_b^\lambda\right) + \sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}u_a^\mu u_b^\nu\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = 0. \tag{1.7}$$

и гранични услов:

$$\sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}u_a^\lambda n_b\Big|_{\partial\mathcal{M}_2} = 0. \tag{1.8}$$

Овде је n_b вектор нормале на границу подмногострукости, $\partial\mathcal{M}_2$. Будући да је та граница једнодимензионална многострукост, можемо да је опишемо параметарским једначинама облика $\xi^a = \xi^a(\lambda)$ где је λ параметар који пребројава тачке на граници. Тада је вектор нормале n_b дефинисан као:

$$n_b = \varepsilon_{bc}\frac{\partial\xi^c}{\partial\lambda}.$$

За детаље и доказ у n димензија видети додатак Б.

Прокоментаришимо сада ове резултате. Прво, појава граничних услова је карактеристика струне, тј. чињенице да њену трајекторију описујемо дводимензионалном многострукошћу $\mathcal{M}_2$. Наиме, струна у датом тренутку може бити отворена или затворена. Ако је отворена, са протоком времена њени крајеви се крећу по двема линијама на просторвременском дијаграму, и те две линије представљају границу $\partial\mathcal{M}_2$ светске површи струне, на којој морају бити задовољени горњи услови. Притом наравно претпостављамо да су крајеви струне слободни. Уколико је струна својим крајевима закачена за нешто, онда се мора узети у обзир динамика тог "нечег" и интеракција са струном, тј. мора се модификовати дејство. У том случају гранични услови не морају бити задовољени, али то више није случај слободне струне, па га не разматрамо. Са друге стране, ако је струна затворена, крајева нема, па је самим тим и граница $\partial\mathcal{M}_2 = \emptyset$. У случају честице нисмо имали овакву ситуацију, и то просто због тога што је светска линија честице једнодимензионална многострукост, $\mathcal{M}_1$, па је њена граница $\partial\mathcal{M}_1$ у општем случају представљена скупом од две тачке (почетак и крај). Но, пошто је по претпоставци $\mathcal{M}_1$ бесконачна линија, крајева нема, па је увек $\partial\mathcal{M}_1 = \emptyset$.

Друго, једначину (1.7) је могуће записати манифестно коваријантно. Наиме, на светској површи (а и на светској линији, у случају честице) имамо две различите геометријске структуре. Осим просторвременских координата x, имамо и координате ξ, које се трансформишу као скалари при општим трансформацијама x координата. Такође, координате x се трансформишу као скалари при општим трансформацијама ξ координата. И једне и друге координате имају своју метрику, и те две метрике су међусобно усаглашене, у смислу да је растојање између две блиске тачке на светској површи рачунато помоћу једне метрике једнако растојању између те две исте тачке рачунатом помоћу друге метрике. Ова особина је последица чињенице да смо метрику γ_{ab} на светској површи дефинисали као индуковану метриком просторвремена, $g_{\mu\nu}$. Оваква ситуација омогућава увођење одговарајућих коефицијената конексије и осталих појмова диференцијалне геометрије, и могуће је дефинисати тотални коваријантни извод (у правцу линије ξ^a), ∇_a, који је истовремено коваријантан и за једну и за другу структуру. Конкретно, ако посматрамо величину $v^{a\mu}$ која се трансформише као вектор и у односу на дифеоморфизме координата ξ и у односу на дифеоморфизме координата x, коваријантан извод ове величине у правцу ξ^b је:

$$\nabla_b v^{a\mu} = \partial_b v^{a\mu} + \Gamma^a{}_{cb} v^{c\mu} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} u^\rho_b v^{a\nu}, \tag{1.9}$$

где смо конексијом $\Gamma^a{}_{cb}$ поправили латински индекс, а конексијом $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}$ просторвременски индекс. Овако дефинисан коваријантни извод задовољава услов метричности за обе метрике:

$$\nabla_a \gamma_{bc} = 0, \qquad \nabla_a g_{\mu\nu} = 0,$$

и омогућава нам да једначину (1.7) препишемо у манифестно коваријантном облику:

$$\gamma^{ab} \nabla_a u^\mu_b = 0. \tag{1.10}$$

Треће, осим честице и струне, потпуно аналогно можемо посматрати и вишедимензионалне објекте, попут мембрана, или сасвим уопште, p-брана, у D-димензионалном просторвремену. Базично гледано, на сличан начин се постулира дејство које даје екстремалну светску хиперповрш, а једначине кретања и гранични услови изгледају практично исто као за струну, с тим да индекси $a, b, c, \ldots$ не узимају вредности

0 и 1, већ $0, 1, 2, \ldots, p$. Сем тога, топологија границе у том случају може свакако бити компликованија.

Након ових коментара, згодно је осврнути се и направити поређење са честицом. Све мањкавости "хибридне" теорије честице и гравитационог поља које смо коментарисали у претходном поглављу појављују се и овде. Координата је и у овом случају истовремено и параметар и варијабла, кретање струне по минималној површи је постулирано, док гравитационо поље које се генерише око струне, мада то није тако очигледно као у случају црне рупе, и овде поседује сингуларитете који "кваре" конзистентност теорије.

Даље, и код струне се као код честице може поћи од мало другачијег дејства:

$$S = \frac{T}{2} \int_{\mathcal{M}_2} d^2\xi \, \sqrt{-h} h^{ab} \eta_{\mu\nu} \frac{\partial z^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial z^\nu}{\partial \xi^b}.$$

Ово дејство се зове Polyakovљево дејство, и има низ карактеристика. У њему се метрика h_{ab} на $\mathcal{M}_2$ посматра као варијабла у теорији. Варирањем овог дејства добијају се једначине кретања за z^μ и h_{ab} које су спрегнуте, као и одговарајући гранични услови. Елиминацијом h_{ab} из једначина кретања за z^μ добијају се управо једначине које следе из Nambu-Gotoовог дејства, па се каже да су дејства класично еквивалентна. Једначина кретања за h_{ab} притом одређује везу те метрике са индукованом метриком, γ_{ab}.

Симетрија овог дејства се такође разликује од Nambu-Gotoовог. Сем тога Polyakovљево дејство је полиномијално по генералисаним брзинама u^μ_a, што га чини згодним за квантизацију, па се веома често разматра уместо Nambu-Gotoовог.

1.5 Поља материје у гравитационом пољу

Природан начин да се направи теорија која садржи како гравитацију тако и материју и њихову интеракцију је да се разматрају *поља материје*. Тада се динамика гравитационог поља просторвремена и материје која се у њему налази задаје укупном густином лагранжијана:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}R + \sqrt{-g}\mathcal{L}_M(\phi, \nabla\phi, g, \ldots), \tag{1.11}$$

где је први члан лагранжијан гравитационог поља, а други представља поља материје и интеракцију са гравитацијом. Овде не желимо да фиксирамо ниједан конкретан $\mathcal{L}_M$, већ радије да посматрамо општи случај и да подразумевамо да поседује својства која ће нас интересовати.

Варирањем овог лагранжијана по метрици $g_{\mu\nu}$ добијамо Einsteinове једначине поља:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G \, T_{\mu\nu}, \tag{1.12}$$

где је

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-g}\mathcal{L}_M \tag{1.13}$$

тензор енергије–импулса поља материје. Einsteinове једначине показују како материја (десна страна једначине) искривљује просторвреме (лева страна). Међутим, иста једначина даје рестрикције и на еволуцију саме материје. Наиме, користећи идентитет (1.1) налазимо да тензор енергије–импулса материје мора бити коваријантно очуван:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \tag{1.14}$$

Дакле, материја не може бити потпуно произвољна, већ је приморана да еволуира у складу са условом (1.14).

Друга последица једначине (1.12) потиче од особине симетричности метричког тензора и Riccijевог тензора $R_{\mu\nu}$. Наиме, пошто је лева страна једначине симетрична у односу на замену места индексима, таква мора бити и десна страна, односно:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \tag{1.15}$$

Ово је такође услов који материја мора испуњавати.

Једна интересантна особина приступа чисте теорије поља је да се не ослања на принцип еквиваленције. Заиста, постулирањем (1.11) нигде се нисмо позвали на принцип еквиваленције, и штавише он може бити експлицитно нарушен у теорији. Разуме се, у стандардним ситуацијама ми заправо желимо да уградимо овај принцип у теорију, и то се најлакше изводи задавањем лагранжијана материје у специјалној теорији релативности, а затим његовим уопштавањем тзв. *минималном заменом*:

$$\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}(x), \qquad \partial_\mu \to \nabla_\mu, \qquad \mathcal{L}_M(\phi, \partial\phi, \eta) \to \sqrt{-g}\mathcal{L}_M(\phi, \nabla\phi, g).$$

Овакво уопштавање лагранжијана материје гарантује да се у локално инерцијалном координатном систему (који постоји и у коме је $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ и $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = 0$), уопштени лагранжијан материје своди на онај из специјалне теорије релативности. Но вреди нагласити да се материја може куповати са гравитацијом и на компликованији начин, и то тако да не буде задовољен принцип еквиваленције, а да укупна теорија и даље буде конзистентна. Лагранжијан (1.11) обухвата и ту могућност и представља општи случај теорије која садржи Einsteinову гравитацију и материју.

Овиме смо завршили преглед "хибридних" теорија и показали основне поставке "чисте" теорије поља материје у кривом простору. Сада прелазимо на реализацију идеје да су честице "направљене" од поља материје као кинк-решења, и да је ефективно кретање таквих кинкова у основи задато лагранжијаном (1.11). Како се ти кинкови генерално описују и како се и одакле изводе одговарајуће ефективне једначине кретања представља предмет наредне главе.

Глава 2

КРЕТАЊЕ КИНКОВА

2.1 Увод

Као што је механика једне честице тек први корак у развоју до одговарајуће теорије поља, тако се и у теорији струна елементарни објекат најпре квантује (тзв. прва квантизација), па се затим одговарајућа таласна функција реинтерпретира као класично поље, које се затим поново квантује (друга квантизација). Једна концептуална разлика између честице и струне састоји се пре свега у томе што се, описно речено, фазни простор честице састоји од координата и импулса, док се фазни простор струне састоји од координата и импулса (њеног центра масе), али и од додатних параметара који описују модове осциловања. Будући да фазни простор струне због тога има већу димензију од одговарајућег простора честице, отвара се могућност да се унутрашњи параметри који разликују елементарне честице протумаче као различити модови осциловања једне те исте струне, што је идеја водиља великог уједињења и теорије свега.

Након квантизације затворене струне, најнижи, безмасени спектар теорије садржи квантна стања која се након преласка на класичну теорију поља струна реинтерпретирају као гравитационо поље $g_{\mu\nu}(x)$, Kalb-Ramondово антисиметрично поље $B_{\mu\nu}(x)$ и дилатонско поље $\Phi(x)$. Да би се боље испитале особине теорије и имао бољи увид у њену структуру, од значаја је конструисати "хибридну" теорију једне струне која се креће у спољашњим пољима насталим од осталих струна, а која се у нискоенергетском сектору своде управо на ова три поља. Због своје полиномијалне структуре која омогућава лакшу квантизацију, разматра се механика Polyakovљеве струне, и (у недостатку бољег метода) постулира се "хибридно" дејство које описује њено кретање у пољима $g_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ и Φ:

$$S = T \int_{\mathcal{M}_2} d^2\xi \, \sqrt{-h} \left[\left(\frac{1}{2} h^{ab} g_{\mu\nu}(x) + \frac{\varepsilon^{ab}}{\sqrt{-h}} B_{\mu\nu}(x) \right) \frac{\partial z^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial z^\nu}{\partial \xi^b} + \Phi(x) R^{(2)} \right]. \tag{2.1}$$

Овде је ε^{ab} дводимензионални антисиметрични Levi-Civita симбол, а $R^{(2)}$ је скаларна кривина на $\mathcal{M}_2$ израчуната помоћу метрике h_{ab}. Иако постоје извесни аргументи који говоре у прилог оваквог дејства, чињеница је да је оно ипак постулирано (може се чак рећи донекле ad-hoc), и то као чиста теоријска генерализација, без икакве сугестије која би долазила из експерименталних података. Притом, поље $g_{\mu\nu}$ има интерпретацију метрике спољашњег просторвремена, док поља $B_{\mu\nu}$ и Φ немају геометријску интерпретацију. Анализа овог дејства и једначина кретања које оно репродукује, међутим, сугерише да ова поља можда ипак имају неке везе са геометријом просторвремена, и то Kalb-Ramondово поље $B_{\mu\nu}$ са торзијом, а дилатон Φ са неметричношћу.

Оваква ситуација сугерише да би било занимљиво размотрити како се заправо екстендирани објекат (попут струне) креће у просторвремену опште геометрије, које садржи како кривину, тако и торзију (па чак и неметричност). Одговор на ово питање се може добити у оквирима теорије поља. Основна идеја састоји се у томе да се честица (или струна) не посматра као фундаменталан, елементаран објекат у теорији, већ да су фундаментална *само поља*, док се честица и/или екстендирани објекти "праве" од тих поља, и то као тзв. *кинк решења*, тј. као стабилне, локализоване структуре одређеног "облика" и особина. Тада се могу искористити *једначине кретања поља* (које су фундаменталне у теорији), и предвидети еволуција таквих објеката. Уколико се испостави да су они стабилни током одређеног периода времена и под одређеним условима, може се говорити о њиховом *кретању*, и из једначина поља извести њихове *ефективне једначине кретања*.

Овакав приступ дакле говори о честици или струни као *сложеном објекту*, а не елементарном, и његове једначине кретања се не постулирају, већ се изводе из (општијих) једначина поља[1]. Ово значи да се једначине кретања струне у спољашњем просторвремену чија геометрија садржи кривину и торзију (и евентуално неметричност) могу у оквиру теорије поља добити без додатних претпоставки о кретању струне у Minkowskijевом просторвремену, па чак и без принципа еквиваленције. Тиме се постиже низ резултата. Наиме, малтене сви недостаци "хибридних" теорија бивају уклоњени, број постулата се смањује, општост повећава, а притом се још и резултујуће једначине кретања могу упоредити са онима које су постулиране у (2.1), и тиме потврдити геометријска веза између поља $B_{\mu\mu}$ и Φ и торзије и неметричности просторвремена. Наравно, може се и десити да једначине кретања буду различите и да се никаква веза не може успоставити, што би био резултат који би довео у питање основаност постулата (2.1) за дејство струне.

У сваком случају, истраживање у овом смеру би дало занимљиве резултате. Но, будући да је овакав приступ нетривијалан како технички тако и концептуално, ограничавамо се на геометрију без торзије и неметричности, што се своди на репродуковање познатих једначина кретања за честицу у кривом простору и уопштавање поступка њиховог добијања на екстендиране објекте, пре свега на струну. Одговарајућа анализа у кривом простору са торзијом (а касније и неметричношћу) представља наредне кораке, које у овом раду нећемо разматрати.

Кренимо дакле редом, од најједноставнијег случаја честице, који је анализиран

[1] Свакако, у тој ситуацији се те једначине поља заправо постулирају, па се на први поглед не види неки смислени помак у броју постулата. Међутим, како ћемо у наставку текста показати, ефективне једначине кретања кинкова *практично уопште не зависе* од конкретног облика једначина динамике поља, већ следе из коваријантног закона одржања тензора енергије–импулса материје.

још у време заснивања опште теорије релативности и у доброј мери решен крајем прве половине прошлог века.

2.2 Честица

Демонстрирајмо Papapetrouов метод [13] извођења ефективних једначина кретања тачкастог кинка у спољашњем гравитационом пољу. Притом, метод ћемо преписати користећи формализам развоја по изводима Diracове δ функције (види додатак A), и приказаћемо га као алгоритам за рачунање једначина кретања који се може уопштити на екстендиране објекте.

Ефективне једначине кретања се изводе у два корака. Као први корак, неопходно је анализирати тензор енергије–импулса материје $T^{\mu\nu}$ који се добија из лагранжијана (1.11) помоћу дефиниционе једначине (1.13), и специјално размотрити какав облик он може имати за добро локализовано кинк-решење којим описујемо честицу. Јасно, овде је основна претпоставка да једначине кретања поља материје које се добијају из лагранжијана материје заиста *имају* локализовано кинк-решење. Када смо једном добили општи облик тензора енергије–импулса, из особина (1.15) и (1.14) које следе из Einsteinових једначина (1.12) изводимо ефективне једначине кретања кинка, у апроксимацији када су његове димензије занемарљиве.

Опис материје

Размотримо неку светску линију временског типа дефинисану параметарским једначинама $x = z(\xi)$, где је ξ произвољан параметар који пребројава тачке на линији. Претпоставићемо да просторвреме има топологију $\Sigma \times \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ одражава време, док је Σ произвољна тродимензионална многострукост којом се описују просторне хиперповрши. И просторвреме и линија су по претпоставци *недегенерисани* и *комплетни*. Ово практично значи да нас интересују само бесконачне линије, чиме искључујемо могућност нефизичких решења, као што су инстантони.

Уопште узев, просторвременске координате x^μ и параметар ξ су произвољни. Ипак, делимично ћемо фиксирати ову слободу како бисмо поједноставили излагање. Наиме, изабраћемо координате x^μ тако да су хиперповрши са једнаком временском координатом просторног типа. Као последица овога, наша линија сече сваку хиперповрш $x^0 = const$ тачно једном, односно функција $z^0(\xi)$ постаје инвертибилна. Затим, у свакој тачки на линији њен тангентни вектор је временског типа:

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \gamma > 0, \qquad \text{где је} \qquad u^\mu \stackrel{\text{деф}}{=} \frac{dz^\mu}{d\xi}. \tag{2.2}$$

Овде је $\gamma(\xi)$ индукована метрика на линији. Изабраћемо још временску координату $x^0 \equiv t$ да параметризује линију. Избор $\xi = t$ (односно еквивалентно $z^0(\xi) \equiv \xi$) намеће ограничење $u^0 = 1$ на тангентни вектор.

Затим фискирамо произвољан тренутак t и развијамо $\sqrt{-g}T^{\mu\nu}(x)$ у ред по δ функцијама око тачке $\boldsymbol{z}(t)$, третирајући притом временску координату t као параметар. Дакле, примењујући формулу (A.3) за случај $d = 3$, имамо:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}T^{\mu\nu}(t,\mathbf{x}) &= \sqrt{\gamma}b^{\mu\nu}(t)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\boldsymbol{z}(t))\\ &+ \sqrt{\gamma}b^{\mu\nu\alpha}(t)\partial_\alpha\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\boldsymbol{z}(t))\\ &+ \sqrt{\gamma}b^{\mu\nu\alpha\beta}(t)\partial_\alpha\partial_\beta\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\boldsymbol{z}(t))\\ &+ \dots\end{aligned}\tag{2.3}$$

Корен из индуковане метрике је додат на десној страни због каснијих погодности. Коефицијенти у развоју су дати формулом (A.4):

$$\begin{aligned}b^{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int_\Sigma d^3\mathbf{x}\,\sqrt{-g}T^{\mu\nu},\\ b^{\mu\nu\alpha} &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int_\Sigma d^3\mathbf{x}\,(x^\alpha - z^\alpha)\sqrt{-g}T^{\mu\nu},\\ b^{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int_\Sigma d^3\mathbf{x}\,(x^\alpha - z^\alpha)(x^\beta - z^\beta)\sqrt{-g}T^{\mu\nu},\end{aligned}$$

итд. Да бисмо успоставили везу са Papapetrouовим радом, [13], приметимо овде да су ови коефицијенти (до на фактор $\sqrt{\gamma}$) једнаки моментима $M^{\mu\nu}$, $M^{\alpha\mu\nu}$, итд, који су тамо дефинисани.

Сада уводимо основну претпоставку о материји — да је локализована на линији $z(t)$, тј. да *тензор енергије–импулса експоненцијално опада како се удаљавамо од линије*. Наравно, овде се користи претпоставка да једначине динамике за поља материје имају решење таквог типа. Теорије са оваквим особинама постоје (монополи, солитони, кинкови…), али ми не желимо да се бавимо ниједном конкретном теоријом, већ разматрамо општи случај.

Као последица ове претпоставке, сваки следећи b-коефицијент је све мањи од претходног, и у најгрубљој апроксимацији (тзв. ”single pole” апроксимација) сви b-ови сем првог се занемарују, па добијамо:

$$\sqrt{-g}T^{\mu\nu}(t,\mathbf{x}) = \sqrt{\gamma}b^{\mu\nu}(t)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\boldsymbol{z}(t)).\tag{2.4}$$

Овај облик тензора енергије–импулса се може коваријантизовати помоћу идентитета:

$$1 = \int_\mathbb{R} dz^0\,\delta(x^0 - z^0) = \int_\mathbb{R} d\xi\,\delta(t - z^0(\xi)).$$

Множећи овим једначину (2.4), стижемо до:

$$T^{\mu\nu}(x) = \int_\mathbb{R} d\xi\,\sqrt{\gamma}\,b^{\mu\nu}(\xi)\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta^{(4)}(x - z(\xi)),\tag{2.5}$$

што је тражени коваријантан облик (који се своди на једначину (2.4) избором $z^0(\xi) = \xi$). Притом, коваријантан је како у односу на дифеоморфизме просторвременских координата x, тако и на дифеоморфизме координате ξ. Такође, пошто се $T^{\mu\nu}$ трансформише као тензор у односу на x-трансформације, по закону количника и $b^{\mu\nu}$ ће се трансформисати на исти начин.

Једначина (2.5) представља тражени опис материје локализоване на линији $z(\xi)$, и у овом облику ћемо тражити решења једначине (2.6).

Једначине кретања

Сада решавамо једначину (1.14) претпостављајући решење у облику (2.5), где су $b^{\mu\nu}(\xi)$ и $z^\mu(\xi)$ непознате функције које треба одредити. Као први корак, препишимо (1.14) у мало другачијем облику. Наиме,

$$\begin{aligned} \nabla_\nu T^{\mu\nu} &= \partial_\nu T^{\mu\nu} + \Gamma^\nu{}_{\rho\nu} T^{\mu\rho} + \Gamma^\mu{}_{\rho\nu} T^{\rho\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) + \Gamma^\mu{}_{\rho\nu} T^{\rho\nu}, \end{aligned}$$

где смо користили идентитет (1.2). Изједначавајући са нулом и множећи са $\sqrt{-g}$ добијамо:

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) + \Gamma^\mu{}_{\rho\nu} \sqrt{-g} T^{\rho\nu} = 0. \tag{2.6}$$

Уврстимо сада (2.5) у (2.6):

$$\int_{\mathbb{R}} d\xi \sqrt{\gamma} \left[b^{\mu\nu} \partial_\nu \delta^{(4)}(x - z) + b^{\rho\nu} \Gamma^\mu{}_{\rho\nu} \delta^{(4)}(x - z) \right] = 0.$$

Ову једначину треба декупловати у пар једначина које засебно одређују z^μ и $b^{\mu\nu}$. Да бисмо то урадили, најпре помножимо једначину са произвољним скаларним пољем $f(x)$ и извршимо интеграцију по целом просторвремену. Функција $f(x)$ притом није потпуно произвољна, већ мора задовољавати нека општа својства. Конкретно, треба да буде различита од нуле само на компактном подскупу свог домена. Ова претпоставка је неопходна да бисмо смели да заменимо редослед интеграција. Користећи парцијалну интеграцију у првом сабирку и особине δ функције, добијамо:

$$\int_{\mathbb{R}} d\xi \sqrt{\gamma} \left[-b^{\mu\nu} \frac{\partial f(z)}{\partial z^\nu} + b^{\rho\nu} \Gamma^\mu{}_{\rho\nu}(z) f(z) \right] = 0. \tag{2.7}$$

На овом месту је неопходна дигресија у геометријску интерпретацију. Скаларно поље $f(x)$ је произвољно, али се његов градијент $\frac{\partial f(z)}{\partial z^\nu}$ дуж линије $z(\xi)$ не може одабрати произвољно, што се види из идентитета:

$$\frac{df(z(\xi))}{d\xi} = \frac{\partial f(z)}{\partial z^\nu} \frac{dz^\nu(\xi)}{d\xi} \overset{\text{деф}}{=} f_{,\nu} u^\nu.$$

Зато делимо градијент $f_{,\nu}$ на паралелну и ортогоналну компоненту:

$$f_{,\nu} = f^\perp_\nu + f^\parallel u_\nu.$$

По дефиницији је $f^{\perp}_{\nu} u^{\nu} = 0$, док коефицијент $f^{\parallel}$ одређујемо из горњег идентитета, па следи:

$$f_{,\nu} = f^{\perp}_{\nu} + \frac{1}{\gamma}\frac{df}{d\xi}u_{\nu}.$$

Сада, $f(z(\xi))$ и $f^{\perp}_{\nu}(z(\xi))$ су независни и произвољни, па једначину (2.7) преписујемо на следећи начин:

$$\int_{\mathbb{R}} d\xi \left\{ -\sqrt{\gamma} b^{\mu\nu} f^{\perp}_{\nu} + \left[\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} u_{\nu} b^{\mu\nu} \right) + \sqrt{\gamma} b^{\rho\nu} \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu} \right] f - \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} u_{\nu} b^{\mu\nu} f \right) \right\} = 0. \quad (2.8)$$

Поента ових трансформација је да сада можемо да закључимо да је сваки члан засебно једнак нули. Пођимо од трећег, који се може изинтегралити као:

$$\int_{\mathbb{R}} d\xi \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} u_{\nu} b^{\mu\nu} f \right) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} u_{\nu} b^{\mu\nu} f \bigg|_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} = 0,$$

јер је функција f различита од нуле само на компактном подскупу свог домена. Дакле овај сабирак нестаје из (2.8).

Затим размотримо други сабирак. Пошто су $f^{\perp}_{\nu}$ и f независни и произвољни, овај први се може изабрати да буде нула, па из (2.8) закључујемо:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} u_{\nu} b^{\mu\nu} \right) + \sqrt{\gamma} b^{\rho\nu} \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu} = 0. \quad (2.9)$$

Ово је једначина за $z(\xi)$ која садржи засад неодређене коефицијенте $b^{\mu\nu}(\xi)$.

Коначно, размотримо први сабирак. На овом месту је важно да се сетимо да Einsteinове једначине гравитационог поља захтевају да тензор енергије–импулса $T^{\mu\nu}$ буде симетричан, (1.15). Ово је специфична особина теорије без торзије. Имајући ово у виду, ако погледамо (2.5) видимо да и $b^{\mu\nu}$ мора бити симетричан. Користећи ову симетрију, разбијамо $b^{\mu\nu}$ на компоненте ортогоналне и паралелне тангентном вектору u^{μ}:

$$b^{\mu\nu} = b^{\mu\nu}_{\perp} + b^{\mu}_{\perp} u^{\nu} + b^{\nu}_{\perp} u^{\mu} + b u^{\mu} u^{\nu}.$$

Сада заменом у једначину $b^{\mu\nu} f^{\perp}_{\nu} = 0$ одређујемо коефицијенте $b^{\mu\nu}_{\perp}$, $b^{\mu}_{\perp}$ и b користећи произвољност функције $f^{\perp}_{\nu}$ и пројектовање једначине на u^{μ}. Напамет се може видети да мора бити $b^{\mu\nu}_{\perp} = 0$ и $b^{\mu}_{\perp} = 0$, док последњи коефицијент, b, остаје произвољан. Закључујемо, дакле, да мора бити:

$$b^{\mu\nu}(\xi) = m(\xi) u^{\mu} u^{\nu}, \quad (2.10)$$

где смо тај произвољан коефицијент b преименовали у m. Видимо да је, до на фактор m, $b^{\mu\nu}$ у потпуности одређено функцијама $z^{\mu}(\xi)$.

Сада можемо да заменимо (2.10) у (2.9) чиме добијамо:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\gamma} m u^{\mu} \right) + \sqrt{\gamma} m u^{\rho} u^{\nu} \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu} = 0. \quad (2.11)$$

Ово је тражена ефективна једначина кретања кинка, јер се њеним решавањем добијају параметарске једначине трајекторије кинка, $z(\xi)$.

Једначина садржи неодређен коефицијент $m(\xi)$. Међутим, она намеће одређен услов на њега. Ово се може лако видети ако пројектујемо једначину на вектор u_μ. Праволинијским рачуном се добија:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\gamma m(\xi)\right) = 0. \tag{2.12}$$

Овим идентитетом се m може елиминисати из једначине. Штавише, ако изаберемо параметар ξ тако да буде $\xi = s$, онда тиме фиксирамо гејџ $\gamma = 1$, и имамо $m = const$, док се једначина кретања своди на познату геодезијску једначину:

$$\frac{d^2 z^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu{}_{\rho\nu}\frac{dz^\rho}{ds}\frac{dz^\nu}{ds} = 0.$$

Ово је дакле ефективна једначина кретања приближно тачкастог кинк-решења поља материје у спољашњем гравитационом пољу. Видимо да је она управо идентична постулиранoj геодезијској једначини кретања коју смо добили варијацијом дејства (1.5) "хибридне" теорије тачкасте честице и гравитационог поља.

Дискусија

Једначина кретања (2.11) коју смо добили је манифестно коваријантна како у односу на опште координатне трансформације, тако и у односу на репараметризације светске линије. Величине $b^{\mu\nu}$, u^μ и m, осим што су просторвременски тензори (редом тензор другог реда, вектор и скалар), такође су тензори у односу на репараметризације $\xi \to \xi'(\xi)$ (редом скалар, вектор и тензор другог реда). Конкретно,

$$m'(\xi') = \frac{d\xi'}{d\xi}\frac{d\xi'}{d\xi}m(\xi).$$

Дакле, m се трансформише као двапут контраваријантан тензор у односу на репараметризације светске линије. Ово сугерише интерпретацију m као једнодимензионалног ефективног тензора енергије–импулса материје локализоване на линији. Штавише, он је коваријантно очуван. Наиме једначина (2.12) се може преписати као

$$\nabla_\xi m = 0,$$

где је ∇_ξ једнодимензионални коваријантни извод дефинисан на светској линији деловањем на вектор као $\nabla_\xi v = \partial_\xi v + \Gamma v$ (овде је Γ једнодимензионална конексија конструисана метричким тензором линије, γ). Дакле, m је заправо ефективни коваријантно очуван једнодимензионални тензор енергије–импулса материје локализоване на линији. У овом смислу, m се може звати *маса честице*.

Сумирајмо резултате овог поглавља. Коваријантни закон одржања тензора енергије–импулса, (1.14), смо применили на материју локализовану на линији. У најнижој апроксимацији, таква материја је коваријантно описана тензором енергије–импулса (2.5), где су $z(\xi)$ и $b^{\mu\nu}(\xi)$ непознате функције. Након анализе закључујемо следеће:

- светска линија је геодезик:

$$\frac{d^2 z^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu{}_{\rho\nu}\frac{dz^\rho}{ds}\frac{dz^\nu}{ds} = 0, \qquad \text{и}$$

- тензор енергије–импулса материје има облик (упореди са (1.6)):

$$T^{\mu\nu}(x) = m\int_{\mathbb{R}} ds\, u^\mu u^\nu \frac{1}{\sqrt{-g}}\delta^{(4)}(x - z(s)), \tag{2.13}$$

  где се константа m интерпретира као маса.

Горњи резултати су добијени у најнижој апроксимацији у развоју по δ функцијама. Ако се, међутим, укључе виши чланови у развоју, једначина кретања ће зависити од унутрашње структуре кинка. На пример, укупни момент импулса ће се куповати са тензором кривине просторвремена, што ће изазвати одступања од геодезијске путање [13]. Виши моменти се доста изучавају у литератури, али за нас овде то није занимљиво, и у ту проблематику нећемо улазити.

Прокоментаришимо овде и то да смо оваквим приступом практично уклонили све недостатке хибридне теорије дискутоване у претходној глави. Најпре, све фундаменталне варијабле у теорији су *поља*, док координате то нису, већ су само параметри. Затим, број постулата је у извесном смислу мањи. Наиме, постулирали смо лагранжијан (1.11) и да у теорији имамо кинкове који су апроксимативно тачкасти, и *извели* њихове једначине кретања. Притом *нисмо постулирали ни принцип еквиваленције ни кретање честице у* Minkowski*јевом простору*. Ово је очигледна предност приступа теорије поља (принцип еквиваленције може у лагранжијану (1.11) чак бити и експлицитно нарушен, на пример). Коначно, кинк није *егзактно* тачкаст (већ само у single-pole апроксимацији коју смо разматрали), што отвара могућност да се у области простора у којој се он налази метрика просторвремена "испегла" тако да нема сингуларитета. Тиме се успешно заобилази појављивање црне рупе на месту где се кинк налази, и метрички тензор је на том месту добро дефинисан, а са њим и геодезијска једначина која описује кретање кинка.

Пређимо сада на централни проблем, да овај општи поступак генералишемо на случај струне. То је предмет излагања у наредном поглављу.

2.3 Струна

Извођење које смо презентовали у претходном поглављу је добро познато (мада не у овако формалном облику и нотацији) и постоје радови [20, 21] који уопштавају процедуру тако да укључи торзију и изучавају разлике које она доноси теорији. Па ипак, сва досадашња истраживања су била оријентисана на случај честице, и није се разматрао одговарајући проблем проналажења једначина кретања за екстендирани објекат, као што је струна. Како смо објаснили у уводу, овај проблем заслужује пажњу, и у овом поглављу зато генералишемо Papapetrouов метод, и презентујемо решење.

Опис материје

Струна је, за разлику од честице, једнодимензионални објекат који не путује по некој светској линији кроз просторвреме, већ пребрисује дводимензионалну проврш, тзв. светску површ, $\mathcal{M}$. Зато разматрамо неку површ у просторвремену, дефинисану једначинама $x^\mu = z^\mu(\xi^a)$, где су ξ^0 и ξ^1 неке произвољне (али добро дефинисане) координате на светској површи. Претпоставићемо да је површ регуларна и да се простире тако да свака просторна хиперповрш сече светску површ тачно једанпут, и да је пресек увек једнодимензионална линија. Ова претпоставка је одраз физичког захтева да се струна налази негде у простору у сваком тренутку, и последица тога је да се површ простире бесконачно далеко у прошлост и будућност.

Уведимо тангентне векторе на светску површ:

$$u_a^\mu \overset{\text{деф}}{=} \frac{\partial z^\mu}{\partial \xi^a} \qquad \text{где} \qquad a \in \{0,1\},$$

и уведимо њен метрички тензор, индукован метриком просторвремена:

$$\gamma_{ab} = g_{\mu\nu} u_a^\mu u_b^\nu .$$

Ако је површ регуларна и координате ξ^a добро дефинисане, тангентни вектори u_0^μ и u_1^μ су линеарно независни. Индукована метрика је по претпоставци недегенерисана, $\det(\gamma_{ab}) \neq 0$, и има сигнатуру $\mathrm{diag}[+1,-1]$. Ово значи да се један од тангентних вектора увек може изабрати да буде временског типа у свакој тачки површи (случајеве када постоје тачке у којима ово није случај не искључујемо, али ћемо их засебно разматрати). То је природно уопштење честичног случаја, где смо разматрали светску линију која је једнодимензионална многострукост чија индукована метрика има сигнатуру $\mathrm{diag}[+1]$.

Као и у случају честице, желимо да развијемо тензор енергије–импулса у δ ред око тачака на светској површи. Процедура је практично иста као у случају честице, са разликом да се уместо $\delta^{(3)}$ користе $\delta^{(2)}$ функције. У single-pole апроксимацији занемарујемо све чланове у развоју сем водећег, тако да тензор енергије–импулса не садржи изводе δ функција. Слично као код честице, коваријантизација се постиже коришћењем још две δ функције и две екстра интеграције. Тако стижемо до коваријантног израза:

$$T^{\mu\nu}(x) = \int_{\mathcal{M}} d^2\xi \, \sqrt{-\gamma}\, b^{\mu\nu}(\xi) \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta^{(4)}(x - z(\xi)). \tag{2.14}$$

Коефицијенти $b^{\mu\nu}$ се трансформишу коваријантно како у односу на дифеоморфизме просторвремена (тј. x координата), тако и у односну на дифеоморфизме многострукости (тј. ξ координата).

Ово је тражени опис материје, и у том облику тражимо решење једначине (2.6). Наравно, овде као и у случају честице подразумевамо да праве једначине кретања за поља материје имају решења у облику струне чији тензор енергије–импулса опада експоненцијално, како би single pole апроксимација имала смисла. За теорије са оваквим особинама се зна да постоје [19], и касније ћемо проанализирати један конкретан пример.

Једначине кретања

Прелазимо на решавање (2.6) тражећи решење у облику (2.14) где су поново $b^{\mu\nu}(\xi)$ и $z(\xi)$ непознате функције које треба одредити. Заменом добијамо:

$$\int_{\mathcal{M}} d^2\xi \sqrt{-\gamma} \left[b^{\mu\nu} \partial_\nu \delta^{(4)}(x-z) + b^{\rho\nu} \Gamma^\mu{}_{\rho\nu} \delta^{(4)}(x-z) \right] = 0.$$

Множимо са произвољним скаларним пољем $f(x)$ и вршимо интеграцију по простор-времену. Претпостављамо да је функција $f(x)$ различита од нуле само на компактном подскупу свог домена, како бисмо смели да комутирамо интеграле. Користећи парцијалну интеграцију у првом сабирку и особине δ функције, добијамо:

$$\int_{\mathcal{M}} d^2\xi \sqrt{-\gamma} \left[-b^{\mu\nu} \frac{\partial f(z)}{\partial z^\nu} + b^{\rho\nu} \Gamma^\mu{}_{\rho\nu}(z) f(z) \right] = 0. \tag{2.15}$$

Разбијамо градијент $f_{,\nu}$ на паралелну и ортогоналну компоненту:

$$f_{,\nu} = f^\perp_\nu + f^\parallel_a u^a_\nu$$

Ортогонална компонента по дефиницији задовољава $f^\perp_\nu u^\nu_a = 0$, док из идентитета:

$$\frac{\partial f(z(\xi))}{\partial \xi^a} = f_\nu u^\nu_a$$

можемо израчунати коефицијенте $f^\parallel_a$, па следи:

$$f_{,\nu} = f^\perp_\nu + \frac{\partial f}{\partial \xi^a} u^a_\nu.$$

Поново, f и $f^\perp_\nu$ су независни и произвољни, па организујемо (2.15) у облик:

$$\int_{\mathcal{M}} d^2\xi \left[-\sqrt{-\gamma} b^{\mu\nu} f^\perp_\nu + \left(\frac{\partial}{\partial \xi^a} \left(\sqrt{-\gamma} b^{\mu\nu} u^a_\nu \right) + \sqrt{-\gamma} b^{\rho\nu} \Gamma^\mu{}_{\rho\nu} \right) f - \frac{\partial}{\partial \xi^a} \left(\sqrt{-\gamma} b^{\mu\nu} u^a_\nu f \right) \right] = 0. \tag{2.16}$$

Размотримо најпре трећи сабирак. Интегралимо га до површинског интеграла:

$$\int_{\mathcal{M}} d^2\xi \frac{\partial}{\partial \xi^a} \left(\sqrt{-\gamma} b^{\mu\nu} u^a_\nu f \right) = \int_{\partial\mathcal{M}} d\lambda \left(\sqrt{-\gamma} b^{\mu\nu} u^a_\nu n_a f \right). \tag{2.17}$$

Овде је λ параметар који пребројава тачке на граници $\partial\mathcal{M}$, а n_a одговарајући вектор нормале:

$$n_a \equiv \varepsilon_{ab} \left. \frac{d\xi^b}{d\lambda} \right|_{\partial\mathcal{M}}.$$

(ε_{ab} је антисиметрични тензор Levi-Civita. За детаље видети додатак Б.) Сада, пошто се f може изабрати независно на граници $\partial\mathcal{M}$ и у унутрашњости $\mathcal{M}$, овај члан мора засебно да буде нула, а пошто је f и произвољно, интегранд мора бити нула, па имамо:

$$\sqrt{-\gamma}b^{\mu\nu}u^a_\nu n_a\Big|_{\partial\mathcal{M}} = 0. \tag{2.18}$$

Једначине (2.18) се зову гранични услови, и нису се појавили у случају честице из простог разлога што једнодимензионална многострукост светске линије нема границу. Чак и овде, у случају затворене струне имамо $\partial\mathcal{M} = \emptyset$, па је десна страна једначине (2.17) идентички нула.

Размотримо затим други сабирак у (2.16). Пошто можемо изабрати $f^\perp_\nu$ и f на произвољан и независтан начин, имамо:

$$\frac{\partial}{\partial\xi^a}\left(\sqrt{-\gamma}b^{\mu\nu}u^a_\nu\right) + \sqrt{-\gamma}b^{\rho\nu}\Gamma^\mu{}_{\rho\nu} = 0. \tag{2.19}$$

Ово је генерализација једначине (2.9) на случај струне. Као диференцијална једначина за $z(\xi)$, садржи неодређене коефицијенте $b^{\mu\nu}$.

Коначно, размотримо први сабирак. Користимо симетричност тензора енергије–импулса, (1.15), и разбијамо $b^{\mu\nu}$ на паралелну и ортогоналну компоненту:

$$b^{\mu\nu} = b^{\mu\nu}_\perp + b^{\mu a}_\perp u^\nu_a + b^{\nu a}_\perp u^\mu_a + b^{ab}u^\mu_a u^\nu_b.$$

Користимо једначину $b^{\mu\nu}f^\perp_\nu = 0$ да одредимо коефицијенте, и добијамо да је $b^{\mu\nu}_\perp = 0$ и $b^{\mu a}_\perp = 0$, док коефицијенти $b^{ab} \equiv m^{ab}$ остају произвољни. Тако коначно добијамо:

$$b^{\mu\nu} = m^{ab}(\xi)u^\mu_a u^\nu_b. \tag{2.20}$$

Ти произвољни коефицијенти m^{ab} се сада трансформишу као скаларно поље у односу на просторвременске дифеоморфизме, односно као контраваријантан тензор другог реда у односу на дифеоморфизме светске површи, и притом је $m^{ab} = m^{ba}$. Приметимо да су и овде, до на m^{ab}, функције $b^{\mu\nu}$ потпуно одређене преко $z^\mu(\xi)$.

Заменом (2.20) у (2.18) добијамо граничне услове у облику:

$$\sqrt{-\gamma}m^{ab}n_b u^\mu_a\Big|_{\partial\mathcal{M}} = 0, \tag{2.21}$$

док заменом у (2.19) добијамо једначине кретања струне:

$$\partial_a\left(\sqrt{-\gamma}m^{ab}u^\mu_b\right) + \sqrt{-\gamma}m^{ab}u^\rho_a u^\nu_b\Gamma^\mu{}_{\rho\nu} = 0. \tag{2.22}$$

Ова једначина се може записати манифестно коваријантно. Ако искористимо тотални коваријантни извод дефинисан једначином (1.9), једначина кретања се лако преписује у облик:

$$\nabla_a(m^{ab}u^\mu_b) = 0. \tag{2.23}$$

Споменимо да се и у случају честице могла учинити иста коваријантизација једначине (2.11), при чему у једнодимензионалном случају имамо само један коефицијент конексије, $\Gamma^0{}_{00} = \frac{d}{d\xi}\ln\sqrt{\gamma}$.

Једначина (2.23) представља једначину кретања струне, која одређује облик светске површи, тј. функције $z(\xi)$, и у њој фигуришу произвољни параметри $m^{ab}(\xi)$. Испоставља се, међутим, да сама једначина намеће одређене услове и на њих. Да бисмо ово видели, извршимо диференцирање, и помножимо са u^c_μ, чиме добијамо:

$$\nabla_a m^{ac} + m^{ab}\left[u^c_\mu \nabla_a u^\mu_b\right] = 0. \tag{2.24}$$

Концентришимо пажњу на члан у угластим заградама. Развијамо коваријатни извод, елиминишемо коефицијенте конексије, и након праволинијског али дуготрајног рачуна записујемо га у облику:

$$u_{\mu c}\nabla_a u^\mu_b = u_{\mu c}\partial_{[a}u^\mu_{b]} + u_{\mu b}\partial_{[c}u^\mu_{a]} - u_{\mu a}\partial_{[b}u^\mu_{c]},$$

где смо угласте заграде на индексима означавају антисиметризацију. Према дефиницији u^μ_a међутим имамо:

$$\partial_{[a}u^\mu_{b]} = \partial_{[a}\partial_{b]}z^\mu = 0.$$

Закључујемо да је читав израз у угластим заградама у (2.24) једнак нули. Као резултат следи да m^{ab} мора бити коваријантно очуван:

$$\nabla_a m^{ac} = 0, \tag{2.25}$$

а знајући то, из (2.23) такође добијамо и једначину кретања у облику:

$$m^{ab}\nabla_a u^\mu_b = 0. \tag{2.26}$$

Чињеница да је m^{ab} коваријантно очуван сугерише интерпретацију m^{ab} као ефективног дводимензионалног тензора енергије–импулса струне. Његове особине ћемо размотрити у следећем поглављу.

Једначина (2.23) представља тражену ефективну једначину кретања кинк-решења поља материје облика танке струне у спољашњем гравитационом пољу, коју треба упоредити са постулираном једначином кретања (1.10) ”механичке” Nambu-Gotoове струне у истом гравитационом пољу. За разлику од честичног случаја, где је ефективна једначина кретања била управо истоветна постулираној геодезијској једначини, у случају струне то више није тако. Наиме, ефективна једначина (2.23) је *општија*, и избором[2] $m^{ab} = T\gamma^{ab}$ своди се на (1.10). Наравно, притом се и гранични услови (2.21) своде на граничне услове (1.8).

Оваква ситуација је занимљива са два аспекта. Први се састоји у чињеници да се за постулирано Nambu-Gotoово дејство у механици бозонске струне мора дати некакво оправдање, јер постоје и струне описане другачијим једначинама кретања. Други аспект се састоји у испитивању особина масеног тензора m^{ab} на основу којих би се евентуално класификовали сви могући типови струна, и тиме ћемо се позабавити у наредном поглављу.

[2] Овде T означава тензију струне из поглавља 1.4.

Дискусија

Продискутујмо најпре облик граничних услова. Једначина (2.21) представља општи облик ових услова, без обзира на особине светске површи и избора координата ξ^a. Укључује чак и случајеве када координате нису свуда добро дефинисане. Међутим, уколико изаберемо ваљане координате, вектори u_a^μ постају линеарно независни, и гранични услови се своде на

$$\sqrt{-\gamma} m^{ab} n_b \Big|_{\partial\mathcal{M}} = 0. \tag{2.27}$$

Овај облик граничних услова се може додатно поједноставити коришћењем стандардне параметризације $\xi^0 = \tau$, $\xi^1 = \sigma$. У овим координатама, граница је задата са $\sigma = 0, \pi$, компонента n_0 вектора нормале нестаје, и гранични услови добијају једноставан облик:

$$\sqrt{-\gamma} m^{a1} \Big|_{\sigma=0,\pi} = 0. \tag{2.28}$$

Иако се подразумева да је метрика γ_{ab} недегенерисана на светској површи, у горњој једначини ипак задржавамо члан $\sqrt{-\gamma}$, како бисмо дозволили нарушење ове претпоставке на граници $\partial\mathcal{M}$.. На овај начин нећемо изгубити класу решења једначина кретања где је метрика на граници дегенерисана, као што је случај нпр. код Nambu-Gotoове струне.

Гранични услови које смо добили су природно асоцирани са познатим Neumannовим граничним условима из теорије струна. Ово је последица чињенице да смо разматрали "слободно падајућу" струну у спољашњем гравитационом пољу. У стандардном варијационом приступу, добили смо их тако што смо дозволили да варијација границе струне буде произвољна. Алтернативни приступ представљају Dirichletови гранични услови, који се добијају наметањем одређених ограничења на варијацију границе струне. Конкретно, крајеви струне се везују за p-брану, која (делимично или потпуно) фиксира њихове трајекторије.

У нашем приступу, међутим, оваква ситуација је незадовољавајућа јер интеракција струне са p-браном нарушава закон коваријантног очувања тензора енергије–импулса на крајевима струне. Наравно, Dirichletови услови се могу наметнути руком, али природан начин да се уграде у теорију је да се p-брана и струна посматрају заједно као један систем који се креће у спољашњем гравитационом пољу. Иако такве компликоване конфигурације материје јесу интересантне по себи, у овом раду их не разматрамо, већ се ограничавамо на случај струне која интерагује само са геометријом просторвремена. Ово значи да крајеви струне немају ништа друго са чим би интераговали, што објашњава појављивање баш Neumannових граничних услова при извођењу једначина кретања.

Сумирајмо сада резултате ове главе. Кренули смо од коваријантног закона одржања тензора енергије–импулса, (1.14), и тражили решење које описује материју у облику струне. У најнижој апроксимацији тензор енергије–импулса има облик (2.14), где су $z(\xi)$ и $b^{\mu\nu}(\xi)$ непознате функције. Након извршене анализе, закључујемо следеће:

- светска површ је одређена једначином:

$$\nabla_a(m^{ab}u_b^\mu) = 0;$$

- масени тензор m^{ab} је коваријантно очуван:

$$\nabla_a m^{ac} = 0;$$

- тачке на крајевима отворене струне морају задовољавати граничне услове:

$$\sqrt{-\gamma}m^{ab}n_b u_a^\mu\Big|_{\partial\mathcal{M}} = 0;$$

- тензор енергије–импулса материје у овој апроксимацији има облик:

$$T^{\mu\nu}(x) = \int_{\mathcal{M}} d^2\xi\sqrt{-\gamma}\, m^{ab}u_a^\mu u_b^\nu \frac{1}{\sqrt{-g}}\delta^{(4)}(x - z(\xi)). \qquad (2.29)$$

Насупрот случају честице, динамика материје у облику струне генерално зависи од њене унутрашње структуре. Заиста, коваријантно очување ефективног тензора енергије–импулса, $\nabla_a m^{ab} = 0$, нема јединствено решење, већ постоји читав скуп различитих могућности да се изабере m^{ab}, од којих свака води другачијој динамици струне.

Приметимо, са друге стране, да постоји и геометријско решење аналогно једнодимензионалном $m \propto \gamma^{-1}$, које има облик $m^{ab} \propto \gamma^{ab}$ и дефинише трајекторију струне у пуној аналогији са геодезијском линијом. Овај конкретан избор m^{ab} репродукује уобичајену добро познату динамику струне — једначине кретања и гранични услови се своде на оне које добијамо варирањем Nambu-Gotoовог дејства. У следећем поглављу ћемо класификовати канонске облике m^{ab} и размотрити њихов утицај на динамику струне. Такође ћемо дати неке примере.

На крају приметимо да једначине кретања честице имају малтене исти облик као једначине кретања струне. Заиста, уколико дозволимо да индекси светске површи узимају само једну вредност 0 уместо две, видимо да се једначина кретања струне своди на геодезијску једначину кретања честице. Ово није случајност, и тиме ћемо се позабавити у поглављу 2.5.

Сада прелазимо на анализу масеног тензора m^{ab} и неких особина једначина кретања и граничних услова струне.

2.4 Унутрашња структура струне

Канонске форме масеног тензора

Размотримо својствени проблем дводимензионалног масеног тензора, m^{ab}. Аналогна четвородимензионална анализа је већ урађена, [22], па је разматрање случаја са две димензије мање потпуно праволинијско.

Својствени проблем за m^{ab} на произвољној светској површи са метриком γ_{ab} дефинисан је једначином:

$$m^{ab} w_b = \lambda w^a,$$

где је $w^a \equiv \gamma^{ab} w_b$. Постојање ненултих својствених вектора w^a је гарантовано условом $\det[m^{ab} - \lambda\gamma^{ab}] = 0$, који преписујемо као квадратну једначину:

$$\lambda^2 - m^a{}_a \lambda + \gamma \det[m^{ab}] = 0.$$

Анализа њене дискриминанте,

$$\Delta \equiv (m^a{}_a)^2 - 4\gamma \det[m^{ab}]$$

ће нас довести до могућих канонских облика за m^{ab}.

Будући да је метрика индефинитна, могућа су три случаја: $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ и $\Delta < 0$. Такође, својствени вектори могу бити временског, просторног или нултог (светлосног) типа. Због тога масени тензор m^{ab} није увек могуће дијагонализовати.

Проанализирајмо понашање m^{ab} у околини неке тачке на светској површи. Изаберимо координате ξ^a тако да у изабраној тачки површ буде локално равна, тј. $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$, и $\Gamma^a{}_{bc} = 0$. Ако напишемо m^{ab} у матричном облику као

$$m^{ab} = \begin{bmatrix} \rho & \pi \\ \pi & p \end{bmatrix},$$

видимо да ρ представља линијску густину енергије дуж струне, π представља одговарајући флукс енергије, а $-p$ тензију струне[3]. Компоненте тензора енергије–импулса морају задовољавати физички услов да флукс енергије не сме да буде већи од густине енергије: $\rho \geqslant |\pi|$. Иначе бисмо имали ситуацију да материја путује брже од светлости [22], што је физички неприхватљиво. Пошто ови услови морају бити задовољени у сваком[4] референтном систему, може се показати да компоненте тензора енергије–импулса m^{ab} морају задовољавати следеће опште услове:

$$\rho + p \geqslant 2|\pi|, \qquad \rho \geqslant p. \tag{2.30}$$

Сада редом разматрамо случајеве када дијагонализација јесте односно није могућа, и дајемо одговарајућу физичку интерпретацију.

Случај $\Delta > 0$

У овом случају, постоји Lorentzова трансформација којом се m^{ab} може довести у дијагоналан облик:

$$m^{ab} = \begin{bmatrix} \lambda^{(1)} & 0 \\ 0 & -\lambda^{(2)} \end{bmatrix}, \qquad \lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)},$$

[3]Овде је p флукс импулса, што је заправо притисак у струни, па $-p$ зато представља тензију.

[4]Наравно, ρ, π и p имају одговарајућу интерпретацију само у системима у којима је светска површ локално равна, па овај услов има смисла наметати само у тим системима. Пошто је наша светска површ дводимензионална, ти референтни системи су међусобно повезани Lorentzовим трансформацијама у две димензије (једна временска и једна просторна), тј. boost-овима.

где су $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$ својствене вредности од m^{ab}. Ово значи да постоји систем мировања[5], у коме је флукс енергије једнак нули, $\pi = 0$, и материја мирује. Ово је случај обичне масене материје.

Услови (2.30) се сада своде на $\lambda^{(1)} \geqslant |\lambda^{(2)}|$, што значи да је густина енергије увек позитивна, и увек је већа од апсолутне вредности тензије. Једначине кретања струне у околини посматране тачке се још додатно могу поједноставити ако користимо локално инерцијални референтни систем, тј. ако просторвременске координате изаберемо тако да буде $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = 0$, у околини посматране тачке. Тада се једначине кретања струне, $m^{ab}\nabla_a u_b^{\mu} = 0$ своде на:

$$\rho \frac{\partial^2 z^\mu}{\partial \tau^2} + p \frac{\partial^2 z^\mu}{\partial \sigma^2} = 0.$$

Ако је тензија струне позитивна[6], $p < 0$, ово се може преписати као позната таласна једначина:

$$\frac{\partial^2 z^\mu}{\partial \tau^2} - \omega^2 \frac{\partial^2 z^\mu}{\partial \sigma^2} = 0, \tag{2.31}$$

где је $\omega = \sqrt{-p/\rho}$ брзина простирања таласа. Услови (2.30) захтевају да буде $\rho > -p$, одакле $\omega < 1$. Дакле, брзина простирања звука кроз струну је мања од брзине светлости, као што бисмо и очекивали за обичну масивну материју.

Пошто се подразумева да је метрика γ_{ab} светске површи недегенерисана (свуда, укључујући и евентуалну границу), гранични услови (2.27) се своде на:

$$\lambda^{(1)} n^0 \Big|_{\partial\mathcal{M}} = \lambda^{(2)} n^1 \Big|_{\partial\mathcal{M}} = 0, \tag{2.32}$$

што значи да бар једна својствена вредност мора на граници бити нула. Физички услов $\lambda^{(1)} \geqslant |\lambda^{(2)}|$ онда одређује $\lambda^{(1)} \neq 0$, $\lambda^{(2)} = 0$, па следи:

$$m^{ab}\Big|_{\partial\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

са очекиваном интерпретацијом да тензија $-p$ у систему мировања мора бити нула на крајевима струне. Из услова (2.32) тада такође следи $n^0 = 0$, што значи да се граница налази на координатним линијама $\xi^1 \equiv \sigma = const$. Одатле видимо да смо могли да користимо и граничне услове у облику (2.28).

Случај $\Delta = 0$

У овом случају, постоји boost којим се m^{ab} преводи у облик:

$$m^{ab} = \begin{bmatrix} \lambda + \mu & \mu \\ \mu & -\lambda + \mu \end{bmatrix}. \tag{2.33}$$

[5]Ово је дакле успутни референтни систем, у коме материја која се налази у тачки коју посматрамо мирује.

[6]Ово значи да је струна растегнута, и тежи да се сажме, попут затегнутог ластижа.

Овде је λ једина својствена вредност, док је μ параметар који није инваријанта, али његов знак јесте, па самим тим имамо дефинисана три подслучаја: $\mu > 0$, $\mu = 0$ и $\mu < 0$. Услови (2.30) се овде своде на $\lambda \geqslant 0$ и $\mu \geqslant 0$, чиме је трећи подслучај искључен као нефизички. Тако, сваки нетривијалан m^{ab} се може разбити на суму две матрице, које одговарају ситуацијама $\lambda = 0$, $\mu > 0$ и $\lambda > 0$, $\mu = 0$. Размотримо их једну по једну.

Подслучај $\lambda = 0$, $\mu > 0$. У овом случају једини својствени вектор је нултог, тј. светлосног типа, и не постоји систем мировања. Оваква ситуација се интерпретира као безмасена материја. У четвородимензионалној електродинамици, на пример, можемо разматрати конфигурацију електричног и магнетног поља једнаког интензитета, $E = B$, и међусобно ортогоналних праваца, $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = 0$. У погодно одабраном референтном систему, тензор енергије–импулса електромагнетног поља добија облик:

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} E^2 & E^2 & 0 & 0 \\ E^2 & E^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Овакав је, на пример, линеарно поларизован раван талас који се простире у смеру x-осе, и видимо да тензор енергије-импулса има тачно облик (2.33), са $\mu = E^2$ и $\lambda = 0$, с тим да има две екстра просторне димензије, јер је пример четвородимензионалан.

Гранични услови (2.27) се своде на:

$$\mu(n^0 - n^1)\Big|_{\partial\mathcal{M}} = 0,$$

одакле $n^0 = n^1$. Дакле, вектор нормале на границу је светлосног типа, па се на основу његове дефиниције види да је и вектор тангенте на границу такође светлосног типа, што имплицира да је таква и сама граница. Видимо да координатна линија $\sigma = const.$ не може да буде на граници, што је заправо разлог због ког нисмо могли да користимо облик граничних услова (2.28).

Подслучај $\lambda > 0$, $\mu = 0$. У овом случају својствена вредност λ је дегенерисана, и два својствена вектора се могу изабрати да буду један просторног а други временског типа. Масени тензор је не само дијагоналан, него чак пропорционалан метрици, $m^{ab} = \lambda\eta^{ab}$. Ово се коваријантно[7] може записати као $m^{ab} = \lambda\gamma^{ab}$, и дефинише познат случај Nambu-Gotoове струне. Густина енергије ρ је позитивна, инваријантна и једнака тензији:

$$\rho = -p = \lambda.$$

[7]Наравно, ако можемо овај израз да запишемо коваријантно, он онда постаје независан од избора координатног система.

Једначине кретања су тачно једначине које минимизирају површину светске површи. У локално инерцијалном систему, своде се на таласну једначину:

$$\frac{\partial^2 z^\mu}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 z^\mu}{\partial \sigma^2} = 0,$$

која је иста као (2.31), али сада са $\omega = 1$. Дакле, Nambu-Gotoова струна је направљена од материје код које је брзина звука једнака брзини светлости. У природи није познат ниједан еластични материјал са оваквим својством.

У локално инерцијалном систему ($\gamma_{ab} = \eta_{ab}$), једини одговарајући облик граничних услова је (2.21). Заиста, он се своди на

$$n^a u_a^\mu \Big|_{\partial \mathcal{M}} = 0,$$

што показује да координатни вектори u_a^μ нису линеарно независни. Дакле, инерцијални систем је обавезно дегенерисан на граници. Највише што можемо да урадимо је да искористимо погодан boost како бисмо наместили $n^0 = 0$, и довели граничне услове у уобичајен облик $u_1^\mu = 0$. Ако, са друге стране, инсистирамо на регуларној параметризацији светске површи, односно на регуларним координатама ξ^a, морамо да напустимо инерцијални систем. Само тада, можемо искористити облик (2.28) граничних услова. Тако добијамо

$$\sqrt{-\gamma}\gamma^{a1}\Big|_{\sigma=0,\pi} = 0. \tag{2.34}$$

Видимо да је метрика светске површи дегенерисана на граници. Пажљивом анализом услова (2.34) добијамо решење

$$\gamma_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{11} \end{pmatrix}$$

у $\sigma = 0$ и $\sigma = \pi$. Специјално, $\gamma_{00} \equiv g_{\mu\nu} u_0^\mu u_0^\nu = 0$, што значи да је граница светске површи светлосног типа. Ово је познат резултат из разматрања Nambu-Goto струна — крајеви струне се крећу брзином светлости.

У оба $\Delta = 0$ случаја које смо разматрали, крајеви струне се крећу брзином светлости. Постоји, међутим, разлика у понашању индуковане метрике γ_{ab}. У безмасеном случају метрика је регуларна на граници ($\gamma \neq 0$), док је у Nambu-Goto случају дегенерисана ($\gamma = 0$). На језику геометрије, светска површ или пресеца просторвременски светлосни конус, или га само додирује. Наравно, сама светска површ је у оба случаја регуларна дводимензионална површ.

Случај $\Delta < 0$

У овом случају постоји boost који преводи m^{ab} у облик:

$$m^{ab} = \begin{bmatrix} \lambda' & \lambda'' \\ \lambda'' & -\lambda' \end{bmatrix}.$$

Овде су две својствене вредности комплексно–коњуговане, $\lambda^{(0)} = \lambda' - i\lambda''$ и $\lambda^{(1)} = \lambda' + i\lambda''$. Одговарајући својствени вектори су такође комплексни.

Услови (2.30) су у потпуној противречности са горњим обликом за m^{ab}. То значи да никад нису задовољени, и да се увек може наћи референтни систем у коме је флукс енергије већи од густине енергије. Овај случај је дакле нефизички, јер одговара материји која се креће брже од светлости.

Да рекапитулирамо: својствени проблем који смо разматрали нас је довео до три различита случаја — случај $\Delta > 0$ који описује масивну материју, случај $\Delta = 0$ који описује безмасену и Nambu-Gotoову материју, и случај $\Delta < 0$ који описује нефизичку, тахионску материју.

Нехомогена дистрибуција материје

Размотримо струну са веома нехомогеном дистрибуцијом материје. Узмимо радикалну ситуацију, где је сва маса струне концентрисана у једној тачки, тј. изаберимо масени тензор m^{ab} да буде:

$$m^{ab}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} ds\, b^{ab} \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \delta^{(2)}(\xi - \chi(s)), \tag{2.35}$$

где су b^{ab} неки параметари, $\xi = \chi(s)$ нека изабрана линија на светској површи струне параметризована растојањем s. Као последица овога, тангентни вектор линије, $v^a \stackrel{\text{деф}}{=} \frac{d\chi^a}{ds}$ има јединичну норму, $\gamma_{ab} v^a v^b = 1$. Интересује нас да одредимо линију из једначина кретања струне.

Јасно, применићемо исту стратегију као у глави 2.2 при чему је једина разлика димензионалност просторвремена (тамо 4, овде 2). Дакле, у коваријантни закон одржања $\nabla_a m^{ab} = 0$ уврстимо једначину (2.35). Резултат је тачно аналоган четвородимензионалном случају, и одмах закључујемо да је $b^{ab} \propto v^a v^b$ и да је тражена линија геодезик на светској површи струне:

$$\frac{d}{ds} v^a + v^b v^c \Gamma^a{}_{bc} = 0. \tag{2.36}$$

Но сада се намеће следеће питање — да ли је ова линија геодезик и у великом просторвремену? Ово је нетривијално питање, јер сасвим уопште геодезик неке подмногострукости није истовремено и геодезик многострукости која је садржи. Изаберимо тачку на линији $\chi(s)$, и приметимо да је тангентни вектор линије у тој тачки, v^a, такође тангентни вектор светске површи. Штавише, он је такође и тангентни вектор у просторвремену, у тој тачки. Развијамо га стога по компонентама базисних вектора одговарајућих тангентних простора:

$$v^\mu \equiv \frac{dz^\mu(\chi(s))}{ds} = \frac{\partial z^\mu(\chi)}{\partial \chi^a} \frac{d\chi^a(s)}{ds} = u^\mu_a v^a.$$

Да бисмо испитали да ли је линија просторвременски геодезик, рачунамо израз:

$$\frac{dv^\mu}{ds} + v^\rho v^\sigma \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma},$$

и ако је линија геодезик у просторвремену, ово мора бити једнако нули. Искористимо дакле формулу $v^\mu = u^\mu_a v^a$ и (2.36), заменимо их у горњи израз, диференцирамо и средимо, и стижемо до:

$$\frac{dv^\mu}{ds} + v^\rho v^\sigma \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} = v^a v^b \nabla_a u^\mu_b .$$

Но пошто је $m^{ab} \propto b^{ab} \propto v^a v^b$, једначина кретања светске површи струне, $m^{ab}\nabla_a u^\mu_b = 0$, имплицира да је $v^a v^b \nabla_a u^\mu_b = 0$, па закључујемо да је:

$$\frac{dv^\mu}{ds} + v^\rho v^\sigma \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} = 0,$$

тј. геодезијска линија светске површи струне је заиста истовремено и геодезијска линија просторвремена.

Анализа овог проблема и позитиван одговор су такође важни са тачке гледишта конзистентности. Ако имамо струну веома мале дужине или обима, гледано са растојања много већег од те дужине не видимо да струна има било какву једнодимензионалну структуру и не разликујемо је од честице. Зато очекујемо да се веома мала струна креће, грубо гледано, по просторвременском геодезику, а горња анализа нам показује да је то заиста и случај.

Nielsen-Olesen vortex линија

У другом примеру ћемо размотрити тензор енергије–импулса за познату Nielsen-Olesen vortex конфигурацију поља [19]. Полазимо од лагранжијана скаларне електродинамике Higgsовог типа у Minkowskijевом просторвремену:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\nabla_\mu\phi)(\nabla^\mu\phi)^* - \lambda(\phi\phi^* - a^2)^2,$$

где је $\nabla_\mu\phi \equiv (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi$. Познато је [19] да одговарајуће једначине поља имају решење које је статично и локализовано око z-осе. У поларним координатама ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$), и временском гејџу електромагнетног поља $A^0 = 0$, решење има облик

$$\boldsymbol{A} = A\mathbf{e}_\varphi, \quad \phi = |\phi|e^{-i\varphi},$$

где су A и $|\phi|$ функције само од ρ, док $\mathbf{e}_\varphi$ означава јединични вектор у правцу φ. Непознате функције $A(\rho)$ и $|\phi|(\rho)$ се одређују из једначина поља. Далеко од z-осе, Nielsen-Olesen решење брзо достиже вакуум

$$A = -\frac{1}{e\rho}, \quad |\phi| = a. \tag{2.37}$$

Он је карактерисан одсуством електромагнетног поља, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} = 0$, и представља прави, физички вакуум теорије. У средишту, када $\rho \to 0$, решење достиже лажни вакуум

$$A = \frac{B}{2}\rho, \quad |\phi| = 0, \tag{2.38}$$

са константним магнетним пољем $\boldsymbol{B} = B\mathbf{e}_z$, и без електричног поља, $\boldsymbol{E} = 0$.

Како није познат егзактан аналитички облик Nielsen-Olesen решења, посматраћемо га апроксимативно на следећи начин. Дефинишимо параметар ℓ који мери дебљину vortex решења. У области $0 \leqslant \rho \leqslant \ell$, апроксимираћемо поље лажним вакуумом (2.38), док ћемо га ван те области апроксимирати правим вакуумом (2.37):

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \rho \leqslant \ell: \qquad & A = \frac{B}{2}\rho, \quad |\phi| = 0, \\ \rho > \ell: \qquad & A = -\frac{1}{e\rho}, \quad |\phi| = a. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Непрекидност функције $A(\rho)$ захтева да магнетно поље задовољава релацију $B = -2/e\ell^2$. У лимесу $\ell \to 0$ (решење облика бесконачно танке струне), $B \to \infty$, али флукс магнетног поља задржава константну вредност, $-2\pi/e$.

Сада смо спремни да израчунамо тензор енергије–импулса:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} + (\nabla_{(\mu}\phi)(\nabla_{\nu)}\phi)^* - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L},$$

где се подразумева симетризација по индексима у заградама. Једноставан рачун показује да тензор енергије–импулса нестаје ван струне, $T^{\mu\nu} = 0$ за $\rho > \ell$, док у унутрашњости, $0 \leqslant \rho \leqslant \ell$, има дијагоналан облик:

$$\begin{aligned} T^{00} = -T^{33} &= \frac{2}{e^2\ell^4} + \lambda a^4, \\ T^{11} = T^{22} &= \frac{2}{e^2\ell^4} - \lambda a^4. \end{aligned}$$

У лимесу $\ell \to 0$, ово решење дакле изгледа као бесконачна танка струна чија се светска површ поклапа са t-z-равни. Користећи параметризацију $\xi^0 = t$, $\xi^1 = z$, координатни вектори светске површи постају $u_0^\mu = \delta_0^\mu$, $u_1^\mu = \delta_3^\mu$, док се индукована метрика γ_{ab} своди на η_{ab}. Видимо да се тензор енергије–импулса може записати у облику (2.14) где је

$$b^{\mu\nu} = \pi\ell^2 T^{\mu\nu}.$$

Да бисмо добили стабилно решење типа струне, морамо се отарасити непожељне тензије у трансверзалним правцима. Да бисмо ово постигли, бирамо слободне параметре у лагранжијану тако да задовољавају везу

$$\lambda a^4 = \frac{2}{e^2\ell^4}, \tag{2.40}$$

на основу чега $T^{00} = -T^{33} = 4/e^2\ell^4$ преостају као једине ненулте компоненте тензора енергије–импулса. Сада, наш $b^{\mu\nu}$ добија облик (2.20) са

$$m^{ab} = T\,\eta^{ab}, \qquad T \equiv \frac{4\pi}{e^2\ell^2}. \tag{2.41}$$

Ово је тачно облик масеног тензора m^{ab} који дефинише Nambu-Goto струну. Наравно, светска површ (t-z-раван) задовољава ефективне једначине кретања струне (2.23), што се лако показује.

Напоменимо на крају да је апроксимација (2.39) у доброј сагласности са анализом Nielsena и Olesena [19]. Они су пронашли област вредности параметара који омогућавају да се њихово vortex решење види као Nambu-Goto струна. У нашој нотацији, $\lambda \sim e^2 \sim (a\ell)^{-2} \gg 1$, и $T \sim a^2$. Ово се слаже како са везом (2.40), тако и са једначином (2.41). Специјално, видимо да каплинг константа e мора бити веома велика (реда ℓ^{-1}) да би обезбедила коначну тензију у лимесу $\ell \to 0$.

Овај пример представља демонстрацију једне конкретне теорије поља која садржи кинк-решење у облику струне. Штавише, у питању је Nambu-Goto тип материје, према класификацији канонских облика масеног тензора. Тиме смо показали да теорије поља које садрже кинк-решења у облику струне заиста постоје, и да се могу третирати апроксимативно на начин који смо претпоставили. Наравно, одговарајућа кинк-решења тада задовољавају ефективне једначине кретања струне (2.23) које смо извели у општем случају.

Ефективни лагранжијан

Један аспект који до сада нисмо дискутовали је Lagrangeева формулација ефективне теорије, тј. дејство које репродукује како једначине кретања струне тако и граничне услове из варијационог принципа. Мотивација за разматрање овог питања је, како смо објаснили у уводу, жеља да се повежу геометријске структуре као што је торзија са постулираним антисиметричним пољем $B_{\mu\nu}$ које се обично разматра у теорији струна [7, 8, 9, 10, 11]. Ову везу је наравно могуће наћи упоређивањем одговарајућих једначина кретања, без потребе да се формулише дејство теорије, али било би једноставније и елегантније најпре формулисати дејство а затим га упоредити са стандардним постулираним дејством теорије струна.

Да бисмо формулисали густину лагранжијана која репродукује једначине (2.23) и (2.21), најпре бирамо варијабле по којима ће се вршити варирање. Најприроднији избор је x^μ, повшто је то случај са познатим ефективним лагранжијаном слободне честице, а одговарајуће "брзине" су u^μ_a. Дакле лагранжијан треба да буде функција ових величина, и такође просторвременске метрике $g_{\mu\nu}$. Међутим, једини начин да се направе скалари од ових величина је да се разматра лагранжијан типа $\mathcal{L}_{\rm eff} = \mathcal{L}_{\rm eff}(\gamma_{ab})$, где је γ_{ab} функција:

$$\gamma_{ab}(u^\mu_a, g_{\mu\nu}) = g_{\mu\nu} u^\mu_a u^\nu_b .$$

Диференцирамо лагранжијан као извод сложене функције:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\rm eff}}{\partial u^\mu_a} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm eff}}{\partial \gamma_{cd}} \frac{\gamma_{cd}}{\partial u^\mu_a} = 2 u^\nu_d g_{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm eff}}{\partial \gamma_{ad}} .$$

Затим радимо исто то за x^μ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\rm eff}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm eff}}{\partial \gamma_{cd}} \frac{\partial \gamma_{cd}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm eff}}{\partial \gamma_{cd}} u^\rho_c u^\sigma_d \left(\Gamma_{\rho\sigma\mu} + \Gamma_{\sigma\rho\mu} \right) .$$

Сада замењујемо ово у Euler-Lagrangeеве једначине

$$\partial_a \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm eff}}{\partial u^\mu_a} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm eff}}{\partial x^\mu} = 0$$

и добијамо:

$$\partial_c \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \gamma_{cd}} u^\mu_d \right) + \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \gamma_{cd}} u^\nu_c u^\rho_d \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} = 0.$$

Ово је веома леп резултат, јер се може директно упоредити са (2.22) или чак (2.11). Тако закључујемо да, не бисмо ли нашли одговарајући лагранжијан, треба да решимо диференцијалну једначину:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \gamma_{ab}} = \sqrt{-\gamma}\, m^{ab}.$$

Као први корак, сетимо се да се $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ трансформише као скаларна густина, и уводимо смену варијабли:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \sqrt{-\gamma}\, I(\gamma_{ab}, m^{ab}),$$

где је I нека инваријанта направљена искључиво од γ_{ab} и m^{ab}. Диференцијална једначина добија мало компликованији облик:

$$\frac{\partial I}{\partial \gamma_{ab}} + \frac{1}{2}\gamma^{ab} I = m^{ab}. \tag{2.42}$$

Ово је заправо систем од неколико нехомогених линеарних парцијалних диференцијалних једначина првог реда по једној јединој функцији I. Да би систем имао решење, мора бити задовољен услов конзистентности:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \gamma_{ab} \partial \gamma_{cd}} = \frac{\partial^2 I}{\partial \gamma_{cd} \partial \gamma_{ab}}.$$

Користећи (2.42) ово се своди на услов за m^{ab}:

$$\frac{\partial m^{ab}}{\partial \gamma_{cd}} + \frac{1}{2}\gamma^{cd} m^{ab} = \frac{\partial m^{cd}}{\partial \gamma_{ab}} + \frac{1}{2}\gamma^{ab} m^{cd}.$$

Размотримо сада два случаја. Први случај: m^{ab} не зависи од γ_{ab}. Услов конзистентности се своди на једначину:

$$\gamma^{ab} m^{cd} = \gamma^{cd} m^{ab},$$

која нема нетривијално решење за m^{ab}. Други случај: m^{ab} је функција γ_{ab}. Пошто нема других тензора у игри, на основу индексне структуре јединa могућа ситуација је:

$$m^{ab} = C\gamma^{ab}, \tag{2.43}$$

која задовољава услов конзистентности.

Дакле закључујемо да ефективни лагранжијан постоји само за случај Nambu-Gotoове струне. Да бисмо ово проверили, заменимо (2.43) у (2.42) и уочимо да диференцијална једначина постаје хомогена:

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_{ab}} (I - 2C) + \frac{1}{2}\gamma^{ab} (I - 2C) = 0.$$

Хомогена једначина има тривијално решење, $I - 2C = 0$, које, враћањем на почетну варијаблу, постаје:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} = 2C\sqrt{-\gamma}.$$

Ово је тачно Nambu-Gotoов лагранжијан.

У случају честице, имамо $m = C/\gamma$ као аутоматску последицу једначина кретања, па немамо другог избора осим $\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\gamma}$, који опет даје уобичајено дејство за честицу:

$$S_{\mathrm{eff}} = \int_{\mathbb{R}} d\xi \sqrt{\gamma} \equiv \int_{\mathbb{R}} ds.$$

Тако, у случају честице немамо никаквог избора како на нивоу једначина кретања, тако и на нивоу дејства. Међутим, у случају струне, постоји само Nambu-Gotoово дејство, док на нивоу једначина кретања постоји могућност избора да m^{ab} буде или не буде Nambu-Goto типа. Ово наравно не представља проблем за једначине кретања, већ недостатак варијационог метода као приступа конструисању теорије. Просто речено, концепт извођења једначина кретања из неког дејства нема довољну општост да омогући извођење једначина кретања са којима се овде срећемо.

Што се тиче граничних услова, (2.21), у Nambu-Gotoовом случају се зна да се појављују тачно како треба, али пошто у општем случају није могуће формулисати лагранжијан, није могуће ни разматрати граничне услове.

На крају, важно је да прокоментаришемо још једну ствар. Доказали смо непостојање лагранжијана типа $\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} = \mathcal{L}_{\mathrm{eff}}(\gamma_{ab})$. Међутим, овај доказ не мора да важи ако дозволимо постојање помоћних варијабли у теорији. Polyakovљев лагранжијан за струну је типичан пример заобилажења Nambu-Gotoовог лагранжијана на рачун увођења екстра варијабли у теорију. У принципу је могуће да се нешто слично уради у општем случају, али за сада не постоји дефинитиван одговор на ово питање.

2.5 Брана

У поглављу 2.2 смо разматрали честицу, која са протоком времена описује једну линију, тј. једнодимензионалну многострукост, $\mathcal{M}_1$. На овој многострукости смо увели координату ξ, тангентни вектор $u^\mu \equiv u^\mu_0$ и индуковани метрички тензор $\gamma \equiv \gamma_{00}$. Користећи њега, можемо дефинисати и коефицијенте конексије, $\Gamma \equiv \Gamma^0{}_{00}$, и тотални коваријантни извод ∇_0. Осим овога, појавио нам се масени тензор, који се у односу на репараметризацију линије трансформише као контраваријантни тензор другог реда, $m \equiv m^{00}$. Основни резултати, ефективна једначина кретања (2.11) и закон коваријантног одржања масеног тензора (2.12), могу се заједно коваријантно записати у облику $\nabla_0(m u^\mu) = 0$ тј. $\nabla_0(m^{00} u^\mu_0) = 0$ тј.:

$$\nabla_a(m^{ab} u^\mu_b) = 0, \qquad \text{где} \qquad a, b \in \{0\}.$$

Такође, тензор енергије–импулса који описује честицу, (2.5), можемо записати у облику[8]:

$$T^{\mu\nu}(x) = \int_{\mathcal{M}_1} d\xi\, \sqrt{\gamma}\, m^{ab} u_a^\mu u_b^\nu \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta^{(4)}(x - z(\xi)), \qquad \text{где} \qquad a, b \in \{0\}.$$

При томе, многострукост $\mathcal{M}_1$ (будући бесконачна и једнодимензионална) није имала границу, $\partial\mathcal{M}_1 = \emptyset$, па се гранични услови нису појавили. Све ове једначине су манифестно коваријантне како у односу на дифеоморфизме просторвремена, $Diff(\Sigma\times\mathbb{R})$, тако и у односу на дифеоморфизме светске линије, $Diff(\mathcal{M}_1)$.

У поглављу 2.3 смо разматрали струну, која са протоком времена описује једну површ, тј. дводимензионалну многострукост, $\mathcal{M}_2$. На овој многострукости смо увели координате $\xi^0 \equiv \tau$ и $\xi^1 \equiv \sigma$, тангентне векторе u_a^μ и индуковани метрички тензор γ_{ab}. Користећи њега, дефинисали смо и коефицијенте конексије, ${\Gamma^a}_{bc}$, и тотални коваријантни извод ∇_a. Осим овога, појавио нам се масени тензор, који се у односу на репараметризацију линије трансформише као контраваријантни тензор другог реда, m^{ab}. Основни резултати, ефективна једначина кретања (2.26) и закон коваријантног одржања масеног тензора (2.25), се заједно коваријантно записују у облику:

$$\nabla_a(m^{ab} u_b^\mu) = 0, \qquad \text{где} \qquad a, b \in \{0, 1\}.$$

Такође, тензор енергије–импулса који описује струну, (2.29), може се записати у облику:

$$T^{\mu\nu}(x) = \int_{\mathcal{M}_2} d^2\xi\, \sqrt{-\gamma}\, m^{ab} u_a^\mu u_b^\nu \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta^{(4)}(x - z(\xi)), \qquad \text{где} \qquad a, b \in \{0, 1\}.$$

При томе, многострукост $\mathcal{M}_2$ може (мада не мора) имати границу, $\partial\mathcal{M}_2$, па су се појавили гранични услови (2.21):

$$\sqrt{-\gamma} m^{ab} n_b u_a^\mu \Big|_{\partial\mathcal{M}_2} = 0.$$

И ове једначине су манифестно коваријантне како у односу на дифеоморфизме просторвремена, $Diff(\Sigma \times \mathbb{R})$, тако и у односу на дифеоморфизме светске површи, $Diff(\mathcal{M}_2)$.

Као што се види, а како смо и прокоментарисали на крају поглавља 2.3, све ове једначине су упадљиво *истоветног облика*, и ово није случајност. Конкретно, *једина разлика*[9] између сваке од ових једначина за честицу и одговарајуће за струну састоји се у *димензионалности многострукости* којом се описује кретање, што се преноси на број независних координата на њој односно број различитих вредности

[8] Метрика линије је позитивно дефинитна, $\gamma_{00} > 0$, па је таква и детерминанта, $\gamma \equiv \det[\gamma_{00}]$. Због тога у изразу за тензор енергије–импулса стоји $\sqrt{\gamma}$ уместо $\sqrt{-\gamma}$. Ово је последица чињенице да је многострукост $\mathcal{M}_1$ једнодимензионална, па на њој немамо праваца просторног типа.

[9] Једина до на детаље око сигнатуре метричког тензора.

које одговарајући индекси могу имати. Природно се намеће питање да ли ће се исте овакве једначине добити и уколико уместо струне посматрамо мембрану, или општије, p-брану. Одговор је потврдан, и исти поступак којим смо извели једначине за честицу и струну може се спровести на идентичан начин и добити исти резултат (нећемо експлицитно демонстрирати овај општи случај, јер нема потребе). Такође, може се видети да *нема нових резултата*[10] при преласку са струне на p-брану.

Друга важна особина на коју треба скренути пажњу је чињеница да у поступку извођења ових резултата *димензија просторвремена*, $D = 4$, *нигде не игра улогу*, осим што фигурише у δ функцији у крајњем резултату за тензор енергије–импулса. Другим речима, и у овом смеру се резултати могу праволинијски уопштити.

Комплетности ради, дакле, наведимо резултат у *општем случају кретања p-бране у D-димензионалном просторвремену*. Нека просторвреме има топологију $\Sigma \times \mathbb{R}$, где је $\dim \Sigma = D - 1$. Нека се у њему креће p-брана, описујући притом светску хиперповрш $\mathcal{M}_{p+1}$ (јасно, претпоставља се да је $D > p + 1$). Хиперповрш је задата параметарским једначинама $x^\mu = z^\mu(\xi^a)$. У најнижој, single-pole апроксимацији, када је брана идеално пљосната, ове параметарске једначине се добијају као решења ефективних једначина кретања p-бране:

$$\nabla_a(m^{ab} u^\mu_b) = 0, \qquad \text{где} \qquad a, b \in \{0, 1, \dots, p\}, \quad \mu \in \{0, 1, \dots, D-1\},$$

и важи закон коваријантног очувања ефективног $(p + 1)$-димензионалног тензора енергије–импулса бране (тзв. масеног тензора):

$$\nabla_a m^{ab} = 0.$$

Осим овога, уколико многострукост $\mathcal{M}_{p+1}$ има границу, $\partial\mathcal{M}_{p+1} \neq \emptyset$, морају бити задовољени гранични услови:

$$\sqrt{-\gamma} m^{ab} n_b u^\mu_a \Big|_{\partial\mathcal{M}_{p+1}} = 0,$$

док је (прави, просторвременски) тензор енергије–импулса p-бране дат као:

$$T^{\mu\nu}(x) = \int_{\mathcal{M}_{p+1}} d^{(p+1)}\xi \, \sqrt{-\gamma} \, m^{ab} u^\mu_a u^\nu_b \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta^{(D)}(x - z(\xi)).$$

Прокоментаришимо на крају још и то да се и у овом општем случају може урадити класификација канонских типова масеног тензора исто као у случају струне, али да су резултати свакако другачији. У већем броју димензија, масени тензор има више независних параметара, па је број могућих различитих типова материје свакако већи.

[10] Појава граничних услова, који су били квалитативно нов резултат, при преласку са честице на струну представља специфичност једнодимензионалне многострукости $\mathcal{M}_1$ која просто нема границу. При разматрању вишедимензионалних многострукости (почев од $\mathcal{M}_2$, тј. од струне), оваквих специфичности више нема.

2.6 Закључак

У овом раду смо разматрали динамику релативистичких материјалних струна у закривљеном просторвремену. Геометрија просторвремена је Riemannова, описана метричким тензором који се добија као решење Einsteinових једначина опште теорије релативности у присуству неких поља материје. Конкретан облик лагранжијана за поља материје притом није прецизиран.

Претпостављено је, међутим, да једначине кретања поља материје имају решења у облику стабилних кинк-конфигурација, које се могу апроксимативно посматрати као тачкасте (честица), линијске (струна) или вишедимензионалне (брана). Циљ разматрања су *ефективне једначине кретања* ових кинк-решења.

Метод којим су ове ефективне једначине кретања изведене као основну идеју користи Mathisson-Papapetrouов метод [12, 13] за случај тачкасте честице. Метод је формализован коришћењем развоја тензора енергије–импулса материје у ред по изводима Diracове δ функције, где се Papapetrouови моменти јављају као коефицијенти у развоју. Ова формализација је омогућила како манифестно коваријантно извођење једначина кретања, тако и уопштавање самог метода на случајеве који нису тачкасте конфигурације поља, већ екстендиране по једној или више просторних димензија (струне, p-бране).

Резултате можемо сумирати на следећи начин. Најпре је, као демонстрација формализма, изведена ефективна једначина кретања за тачкасти кинк, у најнижој, single pole апроксимацији. Добијена једначина је управо геодезијска једначина, као што је и познато из [13]. Затим је формализам у истој апроксимацији примењен на кинк у облику струне, и изведене су ефективне једначине кретања, као и одређени гранични услови (које крајеви струне морају да задовоље, уколико постоје), као главни резултат.

За разлику од честице, у једначинама кретања и граничним условима за случај струне појављује се *ефективни дводимензионални тензор енергије–импулса кинка*, тзв. масени тензор m^{ab}, који је коваријантно очуван, али иначе произвољан. Важна последица је чињеница да се компоненте овог тензора не могу елиминисати из једначина кретања погодним избором координата, како је било могуће у случају честице. Произвољност у избору масеног тензора је мотивисала разматрање његових канонских облика и класификацију могућих типова материје од којих се струна може састојати. Резултат је да постоје три основна физички релевантна типа материје — масена струна, безмасена струна и Nambu-Gotoова струна, док остали канонски облици одговарају нефизичкој, тахионској материји.

Затим су размотрена два примера који реализују конкретан избор масеног тензора. Први се тиче могућности нехомогене дистрибуције материје дуж струне, што је демонстрирано у екстремном случају када је сва материја струне концентрисана у једној тачки на струни. Изведене су ефективне једначине кретања ове тачке, и поново добијена геодезијска једначина, што представља проверу конзистентности поступка[11]. Други представља демонстрацију једне конкретне теорије поља која

[11]Конзистентност се састоји у питању да ли се струна малих димензија креће приближно као

садржи кинк-решења у облику струне. У најгрубљој апроксимацији је израчунат масени тензор за Nielsen-Olesenово vortex решење једначина поља за скаларну електродинамику Higgsовог типа, и показано је да оно има особине Nambu-Gotoове струне. Тиме је демонстрирана оправданост single pole апроксимације за струну[12].

Након разматрања ових примера, направљен је осврт на покушај формулације ефективног дејства које би репродуковало ефективне једначине кретања струне и граничне услове за општи случај масеног тензора. Указано је на тешкоће које се ту јављају и демонстрирано је да се ефективни лагранжијан не може формулисати без употребе помоћних варијабли у теорији, које нису у духу чисто геометријског приступа.

Напокон, читав поступак извођења ефективних једначина кретања уопштен је на случај p-бране у D-димензионалном просторвремену. Једначине кретања и гранични услови имају идентичан облик као у случају честице и струне, с тим да је масени тензор сада $(p+1)$-димензионалан, па садржи много више независних параметара. То има за последицу много већи варијетет у типовима материје од којих се може састојати p-брана.

На крају, размотримо могуће правце даљих истраживања. Они се могу грубо поделити у четири главне групе.

- Генерализација на случај гравитације са торзијом. У случају када просторвреме осим кривине садржи и торзију, постоји изразита неједнозначност у предикцијама о ефективном кретању како честица, тако и екстендираних објеката, која се не може уклонити ни феноменолошки због одсуства експерименталних резултата. Конзистентно разматрање кретања струне у закривљеном простору са торзијом не постоји, док за честицу постоји неколико партикуларних резултата. Ово питање је важно како због питања могућности за експерименталну детекцију торзије просторвремена, тако и због оправдавања и дубљег разумевања постулата у теорији струна.

- Разматрање следеће, pole-dipole апроксимације. Могуће је узети у обзир следећи члан у δ развоју тензора енергије–импулса, и израчунати прву поправку на једначине кретања. Физички, ово значи узимање у обзир момента импулса материје од које се кинк састоји. Ово је за случај честице већ урађено [13], али за струну и p-брану није, и није јасно да ли ће се поправка одразити и на облик граничних услова, или само на једначине кретања. Осим тога, у

честица, што a priori не мора да буде случај. Чињеница да је одговор потврдан говори да апроксимација материје локализоване на некој многострукости не зависи од димензије саме многострукости, у смислу композиције поступка. Наиме, уколико претпоставимо да је материја локализована на линији, а затим претпоставимо да је локализована у једној тачки на тој линији, резултат не сме да се разликује од претпоставке да је материја у старту локализована у тачки. У супротном бисмо могли да закључимо да метод није конзистентан, јер зависи од димензије многострукости којом апроксимирамо материју, односно од редоследа сукцесивних апроксимација.

[12] Могло се, наиме, догодити да не постоји ни једна теорија поља која има кинк-решење у облику струне које се може посматрати у овој апроксимацији. То би значило да основна претпоставка начињена у раду није никад испуњена.

случају да кинк нема масу (тј. да је водећи сабирак у δ развоју нула), ова прва поправка заправо представља најнижу апроксимацију за кинк, и одређује његову трајекторију.

- Класификација могућих канонских облика масеног тензора за општи случај p-бране. Резултати ове анализе би могли бити корисни у примени теорије струна и мембрана при моделирању хадронских интеракција и у другим областима где се јавља потреба за екстендираним објектима.

- Формулација ефективног лагранжијана односно дејства за изведене једначине кретања. Питање начина на који би се ово могло учинити је релативно нејасно, а резултат би био како користан, тако и важан. Наиме, евентуални лагранжијан би омогућио канонску анализу Hamiltonове структуре ефективне теорије, и драстично олакшао све анализе везане за питања симетрије. Коначно, лагранжијан би омогућио како разматрање алтернативних теорија струна на фундаменталном нивоу, тако и моделирање разноразних ефективних теорија свуда где теорија струна и p-брана има примену.

Напоменимо још да постоји и један математички правац истраживања, којим би се егзактно засновао развој у ред по изводима Diracове δ функције, скициран у додатку А. Потребно је формулисати (и доказати) одговарајуће теореме које би дефинисале и прецизирале област примењивости развоја, услове конвергенције, особине коефицијената у развоју, итд.

Додатак А

РАЗВОЈ ПО ИЗВОДИМА DIRACОВЕ δ ФУНКЦИЈЕ

Овај додатак је посвећен формализму развијања дате функције у бесконачан ред по изводима Diracове δ функције. Извођење кључних формула (А.3) и (А.4) је наивно, без математичке строгости, тј. претпостављамо да дата функција има све особине потребне за извођење. На крају ћемо дати једну интуитивну интерпретацију резултата, и повезати га са развојем по мултиполима, добро познатим из електродинамике.

Размотримо реалну функцију $f(x)$, и запишимо је као Fourierов интеграл (подразумевајући да њен Fourierов трансформ, $\tilde{f}(k)$, постоји):

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} dk\, \tilde{f}(k) e^{ikx}, \qquad \text{где је} \qquad \tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dx\, f(x) e^{-ikx}. \tag{A.1}$$

Сада развијамо $\tilde{f}(k)$ у Taylorов ред око тачке $k = 0$ (такође претпостављајући да је ово могуће):

$$\tilde{f}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n, \qquad a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dk^n} \tilde{f}(k)\bigg|_{k=0}. \tag{A.2}$$

Затим заменимо (А.2) у (А.1), па следи:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} dk\, e^{ikx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n \right).$$

Коначно, претпоставимо да је дозвољено заменити места суми и интегралу, па вршимо интеграцију члан по члан:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{R}} dk\, k^n e^{ikx}.$$

Да бисмо решили интеграл, подсетимо се идентитета:

$$k^n e^{ikx} = (-i)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{ikx},$$

па рачунамо:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} dk\, k^n e^{ikx} &= \int_{\mathbb{R}} dk\, (-i)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{ikx} \\ &= (-i)^n \frac{d^n}{dx^n} \int_{\mathbb{R}} dk\, e^{ikx} \\ &= 2\pi(-i)^n \frac{d^n}{dx^n}\delta(x).\end{aligned}$$

Дакле, закључујемо да се функција $f(x)$ може развити у (бесконачан) ред по изводима Diracове δ функције (око тачке $x = 0$):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{d^n}{dx^n}\delta(x),$$

где су коефицијети b_n дати као:

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int_{\mathbb{R}} dx\, x^n f(x).$$

Интеграл на десној страни се обично назива *момент n-тог реда функције* $f(x)$.

Наравно, уз мале модификације горње процедуре могуће је развити $f(x)$ не око $x = 0$, него око произвољне тачке z. Да бисмо то постигли, убацимо у (A.1) под знак интеграла израз $e^{ikz}e^{-ikz}$ (који је очигледно једнак 1), и поновимо аналоган поступак не кварећи притом израз $e^{ik(x-z)}$. Резултујући развој је:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{d^n}{dx^n}\delta(x-z),$$

док су коефицијенти b_n сада дати као:

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int_{\mathbb{R}} dx\, (x-z)^n f(x).$$

Наравно, може се ићи и даље, и уопштити на d-димензионалан случај. Ако је задата функција $f(x) \equiv f(x_1, \ldots, x_d)$, као и тачка $z \equiv (z_1, \ldots, z_d)$, онда важи општа формула:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{\mu_1 \ldots \mu_n} \partial_{\mu_1} \ldots \partial_{\mu_n} \delta^{(d)}(x-z), \tag{A.3}$$

где индекси μ_i узимају вредности од 1 до d, $\delta^{(d)}(x-z)$ означава d-дименсионалну δ функцију (тј. производ d једнодимензионалних δ функција), а ∂_μ означава диференцирање по x^μ. Одговарајућа формула за коефицијенте тада гласи:

$$b^{\mu_1 \ldots \mu_n} = \frac{(-1)^n}{n!}\int_{\mathbb{R}^d} d^d x\, (x^{\mu_1} - z^{\mu_1}) \ldots (x^{\mu_n} - z^{\mu_n}) f(x). \tag{A.4}$$

Интерпретација развоја (A.3) је следећа. Претпоставимо да је функција $f(x)$ локализована око тачке z, и да тежи нули веома брзо како се удаљавамо од z. Ако погледамо функцију "издалека", можемо је апроксимирати δ функцијом, што је први члан у (A.3). Сада, како се приближавамо z, видимо све више и више "структуре" у $f(x)$, и узимамо у обзир други и следеће чланове у (A.3).

Такође може бити инструктивно да размотримо пример. Нека је $d = 3$, и нека је $f(x)$ електростатичка густина наелектрисања, $\rho(\boldsymbol{r})$, извора локализованог око тачке $\boldsymbol{r} = 0$. За прва два коефицијента у развоју добијамо:

$$
\begin{aligned}
n = 0: \quad b &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{r}\,\rho(\boldsymbol{r}) &&= Q, \\
n = 1: \quad \boldsymbol{b} &= -\int_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r}) &&= -\boldsymbol{p},
\end{aligned}
$$

где препознајемо Q и $\boldsymbol{p}$ као укупно наелектрисање и електростатички диполни момент извора. Дакле, развој можемо писати као:

$$
\rho(\boldsymbol{r}) = Q\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{p}\cdot\nabla\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}) + \text{ виши чланови.}
$$

Сада, ако желимо да израчунамо електростатички потенцијал $\varphi(\boldsymbol{r})$ далеко од извора, искористимо познати израз из електродинамике,

$$
\varphi(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{r}'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},
$$

Заменимо, интегралимо први члан директно а други парцијалном интеграцијом, и добијамо:

$$
\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} + \text{ виши чланови,}
$$

што представља добро познати развој по мултиполима из електродинамике [23]. Овај пример илуструје смисао развоја по изводима δ функције, и пружа одговарајућу интуицију.

Додатак Б

ГЕНЕРАЛИСАНА STOKESОВА ТЕОРЕМА

У најопштијем случају, Stokesова теорема гласи:

$$\int_{\mathcal{M}} \boldsymbol{dA} = \int_{\partial\mathcal{M}} \boldsymbol{A}, \tag{Б.1}$$

где је $\mathcal{M}$ многострукост димензије $p+1$, $\partial\mathcal{M}$ њена граница, а $\boldsymbol{A}$ произвољна p-форма. Са ове апстрактне нотације прелазимо на мало конкретнији облик теореме на следећи начин. Најпре уводимо координате ξ на $\mathcal{M}$, и p-форму $\boldsymbol{A}$ записујемо као:

$$\boldsymbol{A} = A_{a_1\ldots a_p} \boldsymbol{d}\xi^{a_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{d}\xi^{a_p}.$$

Компоненте у развоју су потпуно антисиметричне у односу на замену било која два индекса. Спољашњи извод ове форме је тада:

$$\boldsymbol{dA} = \left(\partial_b A_{a_1\ldots a_p}\right) \boldsymbol{d}\xi^b \wedge \boldsymbol{d}\xi^{a_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{d}\xi^{a_p},$$

Лева страна једначине (Б.1) се сада рачуна на следећи начин:

$$\int_{\mathcal{M}} \boldsymbol{dA} = \int_{\mathcal{M}} \left(\partial_b A_{a_1\ldots a_p}\right) \boldsymbol{d}\xi^b \wedge \boldsymbol{d}\xi^{a_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{d}\xi^{a_p},$$

но имајући у виду да је под знаком интеграла

$$\boldsymbol{d}\xi^b \wedge \boldsymbol{d}\xi^{a_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{d}\xi^{a_p} = \varepsilon^{ba_1\ldots a_p} d^{(p+1)}\xi,$$

имамо:

$$\int_{\mathcal{M}} \boldsymbol{dA} = \int_{\mathcal{M}} d^{(p+1)}\xi \; \partial_b \left(\varepsilon^{ba_1\ldots a_p} A_{a_1\ldots a_p}\right) = \int_{\mathcal{M}} d^{(p+1)}\xi \; \partial_b B^b, \tag{Б.2}$$

где је по дефиницији

$$B^b \overset{\text{деф}}{=} \varepsilon^{ba_1\ldots a_p} A_{a_1\ldots a_p}. \tag{Б.3}$$

Позабавимо се сада десном страном једначине (Б.1). Да бисмо израчунали интеграл форме, најпре треба да напишемо параметарске једначине границе $\partial\mathcal{M}$ по којој вршимо интеграцију. Пошто је димензија границе p, уводимо толико параметара, λ^i, и тражене параметарске једначине пишемо као $\xi = \xi(\lambda)$, при чему ξ координата има $p+1$, док λ координата има p. Сада поступамо као горе, при чему форму $\boldsymbol{A}$ сада треба развити по бази $\boldsymbol{d}\lambda^i$. Дакле, пошто је:

$$\boldsymbol{d}\xi^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial \lambda^i}\boldsymbol{d}\lambda^i,$$

имамо:

$$\boldsymbol{A} = A_{a_1\ldots a_p}\frac{\partial \xi^{a_1}}{\partial \lambda^{i_1}}\ldots\frac{\partial \xi^{a_p}}{\partial \lambda^{i_p}}\boldsymbol{d}\lambda^{i_1}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{d}\lambda^{i_p}.$$

Потпуно аналогно као малопре, под знаком интеграла је (сада на граници $\partial\mathcal{M}$)

$$\boldsymbol{d}\lambda^{i_1}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{d}\lambda^{i_p} = \varepsilon^{i_1\ldots i_p}d^p\lambda,$$

па имамо:

$$\int_{\partial\mathcal{M}}\boldsymbol{A} = \int_{\partial\mathcal{M}} d^p\lambda\ A_{a_1\ldots a_p}\frac{\partial \xi^{a_1}}{\partial \lambda^{i_1}}\ldots\frac{\partial \xi^{a_p}}{\partial \lambda^{i_p}}\varepsilon^{i_1\ldots i_p}. \tag{Б.4}$$

Пре него што изједначимо леву страну са десном, елиминишимо компоненте $A_{a_1\ldots a_p}$ у корист B^b на следећи начин. Помножимо једначину (Б.3) са $\varepsilon_{ab_1\ldots b_p}$:

$$B^b\varepsilon_{bb_1\ldots b_p} = \varepsilon_{bb_1\ldots b_p}\varepsilon^{ba_1\ldots a_p}A_{a_1\ldots a_p} \equiv \varepsilon^{ba_1\ldots a_p}_{bb_1\ldots b_p}A_{a_1\ldots a_p}.$$

Сада, пошто су компоненте $\boldsymbol{A}$ антисиметричне на замену било која два индекса, десна страна се своди на:

$$\varepsilon^{ba_1\ldots a_p}_{bb_1\ldots b_p}A_{a_1\ldots a_p} = p!A_{b_1\ldots b_p},$$

па имамо:

$$A_{b_1\ldots b_p} = \frac{1}{p!}B^b\varepsilon_{bb_1\ldots b_p}.$$

Заменом у (Б.4) сада добијамо:

$$\int_{\partial\mathcal{M}}\boldsymbol{A} = \frac{1}{p!}\int_{\partial\mathcal{M}} d^p\lambda\ B^b\varepsilon_{ba_1\ldots a_p}\frac{\partial \xi^{a_1}}{\partial \lambda^{i_1}}\ldots\frac{\partial \xi^{a_p}}{\partial \lambda^{i_p}}\varepsilon^{i_1\ldots i_p} = \int_{\partial\mathcal{M}} d^p\lambda\ B^b n_b, \tag{Б.5}$$

где је по дефиницији:

$$n_b \stackrel{\text{деф}}{=} \frac{1}{p!}\varepsilon_{ba_1\ldots a_p}\frac{\partial \xi^{a_1}}{\partial \lambda^{i_1}}\ldots\frac{\partial \xi^{a_p}}{\partial \lambda^{i_p}}\varepsilon^{i_1\ldots i_p}.$$

Сада изједначавамо (Б.2) са (Б.5) по исказу теореме, па следи:

$$\int_{\mathcal{M}} d^{(p+1)}\xi\ \partial_b B^b = \int_{\partial\mathcal{M}} d^p\lambda\ B^b n_b.$$

У овом облику смо Stokesову теорему употребили у тексту.

Напоменимо још два детаља. Прво, да би знак у теореми био добар (будући да је граница $\partial\mathcal{M}$ "оријентисана"), Levi-Civita симболи за $\mathcal{M}$ и $\partial\mathcal{M}$ морају бити усклађени (у смислу да се и један и други понашају према правилу "десног" или "левог завртња"). На пример, исправна је дефиниција:

$$\varepsilon^{012\dots p} = +1, \qquad \varepsilon^{12\dots p} = +1.$$

Друго, вектор n_b зовемо "нормала" из простог разлога што он то и јесте. Да бисмо то показали, изаберимо неки вектор који је тангентан на границу $\partial\mathcal{M}$, и помножимо га скаларно са n_b. Не умањујући општост[1], за тангентни вектор можемо узети $\partial\xi^b/\partial\lambda^{i_1}$. Следи:

$$\frac{\partial\xi^b}{\partial\lambda^{i_1}} n_b = \frac{1}{p!}\varepsilon_{ba_1\dots a_p}\frac{\partial\xi^b}{\partial\lambda^{i_1}}\frac{\partial\xi^{a_1}}{\partial\lambda^{i_1}}\dots\frac{\partial\xi^{a_p}}{\partial\lambda^{i_p}}\varepsilon^{i_1\dots i_p} = 0,$$

јер је први ε симбол антисиметричан на замену индекса b и a_1, док је производ прва два разломка симетричан.

Закључујемо да је n_b ортогоналан на све тангентне векторе из $\partial\mathcal{M}$, а пошто је $\dim\mathcal{M} = p+1$ и $\dim\partial\mathcal{M} = p$, он дефинише једини правац који је ортогоналан на границу, и због тога је оправдан назив "вектор нормале".

[1] Свакако, имајући у виду присуство другог ε симбола у изразу за n_b, видимо да у њему морају фигурисати сви тангентни вектори типа $\partial\xi^a/\partial\lambda^i$. Одговарајућим комутирањем и преименовањем немих индекса увек можемо било који од њих довести на место првог, $\partial\xi^{a_1}/\partial\lambda^{i_1}$.

Литература

[1] Y. Nambu, *Phys. Rev.* D **10**, 4262 (1974).

[2] T. Goto, *Prog. Theor. Phys.* **46**, 1560 (1971).

[3] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1987).

[4] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, *Phys. Lett.* B **158**, 316 (1985); *Nucl. Phys.* **B261**, 1 (1985).

[5] C. G. Callan, D. Friedan, E. J. Martinec, and M. J. Perry, *Nucl. Phys.* **B262**, 593 (1985).

[6] T. Banks, D. Nemeschansky, and A. Sen, *Nucl. Phys.* **B277**, 67 (1986).

[7] J. Scherk and J. H. Schwarz, *Phys. Lett.* B **52**, 347 (1974); *Nucl. Phys.* **B81**, 118 (1974).

[8] T. Dereli and R. W. Tucker, *Class. Quant. Grav.* **12**, L31 (1995).

[9] T. L. Curtright and C. K. Zachos, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1799 (1984).

[10] S. Mukhi, *Phys. Lett.* B **162**, 345 (1985).

[11] B. Sazdović, *Mod. Phys. Lett.* A **20**, 897 (2005); *Int. J. Mod. Phys.* A **20**, 5501 (2005).

[12] M. Mathisson, *Acta. Phys. Pol.* **6**, 163 (1937).

[13] A. Papapetrou, *Proc. R. Soc.* A **209**, 248 (1951).

[14] M. H. L. Pryce, *Proc. R. Soc.* A **195**, (62) (1948).

[15] W. Tulczyjew, *Acta. Phys. Pol.* **18**, 393 (1959).

[16] J. Weyssenhoff and A. Raabe, *Acta. Phys. Pol.* **9**, 7 (1947).

[17] G. Dixon, *Nuovo Cimento* **XXXVIII**, 1616 (1965); **XXXIV**, 317 (1964); *Proc. R. Soc.* A **314**, 499 (1970); **319**, 509 (1970); **319**, 509 (1974); *Gen. Relativ. Gravit.* **4**, 199 (1973).

[18] M. Vasilić, M. Vojinović, *Phys. Rev.* D **73**, 124013 (2006).

[19] H. Nielsen, P. Olesen, *Nucl. Phys.* B **61**, 45 (1973).

[20] P. Yasskin, W. Stoeger, *Phys. Rev.* D **21**, 2081 (1980).

[21] K. Nomura, T. Shirafuji, K. Hayashi, *Prog. Theor. Phys.* **86**, 1239 (1991).

[22] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics, Vol. 2: The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, New York (1975), стр. 273-274.

[23] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons Inc., New York (1974), стр. 136.