СИМЕТРИЈА ДУАЛНОСТИ У BORN-INFELDОВОЈ ЕЛЕКТРОДИНАМИЦИ

Марко Војиновић

Београд, 2002.

Апстракт

Разматрају се најбитније особине Born-Infeldове електродинамике, са нагласком на дуалној симетрији. До извесне мере детаљно се демонстрирају birefiringence ефекат (тј. његово одсуство), постојање сингуларних решења са коначном енергијом, главне последице дуалне симетрије и предикција магнетних монопола. На крају се наводе разлози и аспекти изучавања ове теорије. У додатку је дат доказ једне теореме неопходне за извођење неких од презентованих резултата.

Abstract

Most important features of Born-Infeld electrodynamics are discussed, with the emphasize on duality symmetry. Up to some point in detail the (absence of the) birefringence effect, existence of finite energy singular solutions, major consequences of the duality symmetry and the prediction of magnetic monopoles are demonstrated. In the end are stated the reasons for and various aspects of investigation of this theory. In the Appendix is given a proof for a theorem neccesary for the derivation of some of the results presented.

Садржај

Глава 0

УВОД

Структура рада

Овај рад се бави, као што му име каже, симетријом дуалности у Born-Infeldовој електродинамици. Састоји се из два главна дела.

У првом делу (главе 1 и 2) се формулише и укратко анализира Born–Infeldова нелинеарна електродинамика. Дискутују се мотивација за увођење нове теорије, основне особине и неки занимљиви резултати који из ње следе.

У другом делу (глава 3) се обрађује појам дуалних трансформација и разматра дуална симетрија и њене последице у електродинамици уопште, са нагласком на Maxwellовој и Born-Infeldовој теорији.

На крају, у додатку A је дат доказ једне релативно битне теореме без које се нису могли извести неки важни теоријски закључци у раду.

Такође, желим да се захвалим свом ментору, др Маји Бурић, на вођењу и помоћи у свим аспектима писања овог рада, од избора теме преко разматрања неких концептуалних питања до исправљања штампарских грешака.

Конвенције

Следе конвенције којих се држим у писању једначина:

- користим природни CGS систем јединица:

$$c = \hbar = k_B = 4\pi\varepsilon_0 \stackrel{\text{деф}}{=} 1,$$

  одакле се лако налазе следеће вредности SI јединица мере:

$$\begin{aligned} 1\ \mathrm{s} &\equiv 299792458\ \mathrm{m}, \\ 1\ \mathrm{kg} &= 2.84 \cdot 10^{42}\ \mathrm{m}^{-1}, \\ 1\ \mathrm{K} &= 436.72\ \mathrm{m}^{-1}, \\ 1\ \mathrm{A} &= 1.78 \cdot 10^{9}\ \mathrm{m}^{-1}. \end{aligned}$$

  У овим јединицама елементарно наелектрисање (тј. наелектрисање протона) је бездимензиона величина и износи:

$$e^2 = \frac{1}{137}, \qquad e = 0.0853;$$

- метрика равног просторвремена је просторног типа:

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{1}$$

- антисиметрични тензор Levi-Civita је дефинисан једначинама:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \overset{\text{деф}}{=} \frac{1}{\sqrt{-g}}[\mu\nu\rho\sigma], \qquad \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\sqrt{-g}\,[\mu\nu\rho\sigma], \qquad g \overset{\text{деф}}{=} \det\left[g_{\mu\nu}\right], \tag{2}$$

$$[\mu\nu\rho\sigma] \overset{\text{деф}}{=} \begin{cases} +1 & \text{ако је } \mu\nu\rho\sigma \text{ парна пермутација } 0123, \\ -1 & \text{ако је } \mu\nu\rho\sigma \text{ непарна пермутација } 0123, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3}$$

Корисне су следеће контракције овог тензора:

$$\begin{aligned} \delta^{\alpha\beta\gamma}{}_{\mu\nu\rho} &\overset{\text{деф}}{=} -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{ако је } \alpha\beta\gamma \text{ парна пермутација } \mu\nu\rho, \\ -1 & \text{ако је } \alpha\beta\gamma \text{ непарна пермутација } \mu\nu\rho, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases} \\ \delta^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} &\overset{\text{деф}}{=} -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \tfrac{1}{2}\delta^{\alpha\beta\rho}{}_{\mu\nu\rho} = \begin{cases} +1 & \text{ако је } \alpha\beta \text{ парна пермутација } \mu\nu, \\ -1 & \text{ако је } \alpha\beta \text{ непарна пермутација } \mu\nu, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases} \\ \delta^{\alpha}{}_{\mu} &\overset{\text{деф}}{=} -\tfrac{1}{6}\varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \tfrac{1}{6}\delta^{\alpha\nu\rho}{}_{\mu\nu\rho} = \tfrac{1}{3}\delta^{\alpha\nu}{}_{\mu\nu} = \begin{cases} +1 & \text{ако је } \mu = \alpha, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

и притом важи идентитет $\delta^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = \delta^{\alpha}{}_{\mu}\delta^{\beta}{}_{\nu} - \delta^{\alpha}{}_{\nu}\delta^{\beta}{}_{\mu}$;

- коваријантни тезнор електромагнетног поља има следеће компоненте:

$$[F_{\mu\nu}] \equiv [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu] = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

(ово није конвенција већ се може извести[1], но згодно је да се на овом месту експлицитно запише);

- дуални тензор датог тензора $A_{\mu\nu}$ дефинишемо као

$$\star A^{\mu\nu} \equiv (\star A)^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_{\rho\sigma}.$$

[1] Изводи се захтевањем да једначине

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) \qquad \text{и} \qquad \frac{dp^\mu}{d\tau} = qF^{\mu}{}_{\nu}u^\nu$$

имају истоветан математички и физички садржај. Притом, у локално Lorentzовом координатном систему важе једначине:

$$d\tau = dt\sqrt{1-v^2}, \qquad u^\mu \mathbf{e}_\mu = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\mathbf{e}_t + \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad p^\mu\mathbf{e}_\mu = E\mathbf{e}_t + \vec{p},$$

познате из специјалне теорије релативности, заједно са једначином

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{v}.$$

Прве две једначине се експлицитно изједначе по компонентама, примене све остале наведене једначине, очитају коефицијенти $F^{\mu}{}_{\nu}$, а затим са (1) спусти индекс.

Глава 1

МОТИВАЦИЈА

Основни теоријски недостатак Maxwellове електродинамике је бесконачна енергија електромагнетног поља тачкасте честице. Он се може избећи на два начина:

- задавањем неке "структуре" честици, са захтевом да укупна енергија рачуната једначинама Maxwellове електродинамике остане коначна;
- задавањем алтернативне теорије, са захтевима да укупна енергија буде коначна и да честица остане тачкаста.

Вршени су покушаји и у једном и у другом смеру, но оба пута уз извесне потешкоће. Max Born и Leopold Infeld су пришли проблему другом методом, и формулисали [1] електродинамику која решава проблем бесконачне енергије тачкасте честице, али по цену увођења нелинеарних једначина динамике поља.

Основни технички проблем код нелинеарних једначина динамике састоји се у томе да принцип суперпозиције поља више не важи. То драстично отежава извођење било каквих предвиђања теорије јер не постоји општи метод решавања једначина, а прави проблеме и у формулацији одговарајуће квантне теорије. Са друге стране, управо та нелинеарност омогућава да се заобиђе дивергенција укупне енергије поља тачкасте честице и добије коначна вредност.

Мотивацију за облик теорије Born је добио по угледу на структуру кинематичких једначина теорије релативности, са идејом да коначност укупне енергије тачкасте честице обезбеди наметањем горње границе на интензитет електромагнетног поља, по угледу на брзину светлости у специјалној теорији релативности. Подсетимо се зато најпре односа класичне и релативистичке механике.

У класичној нерелативистичкој механици Lagrangeева функција за слободну честицу једнака је њеној кинетичкој енергији:

$$L_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{2}mv^2,$$

где је m маса честице, а v интензитет брзине кретања, који може да узима вредности из интервала $[0, \infty)$. У релативистичком случају Lagrangeеву функцију можемо писати као[1]:

$$L_{\mathrm{rel}} = mc^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right).$$

Јасно је да се у лимесу $c \to \infty$ L_{rel} своди на L_{cl}. Из теорије релативности је познато да оваква Lagrangeева функција генерише теорију у којој је на природан начин (алгебарским механизмом) наметнуто ограничење на интензитет брзине: $0 \leqslant v \leqslant c$.

[1] Јасно, брзина светлости c је у уводу била дефинисана као $c = 1$ тако да нигде не морамо да је пишемо. Међутим, за потребе овог одељка је корисно експлицитно је писати да би аналогија коју хоћемо да презентујемо била јаснија.

Пошто лагранжијан Maxwellове електродинамике има облик

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M}} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right),$$

Born га је, угледајући се на овакав однос између класичне и релативистичке механике, модификовао у облик:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{B}} \stackrel{\text{деф}}{=} \frac{1}{4\pi}b^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\vec{E}^2 - \vec{B}^2}{b^2}}\right). \tag{1.1}$$

Овде треба приметити да интензитети поља $\vec{E}$ и $\vec{B}$ у Maxwellовој теорији нису ничим ограничени, тј. $\vec{E}^2, \vec{B}^2 \in [0, \infty)$, док у Bornовој теорији мора бити испуњен услов[2] $0 \leqslant \sqrt{\vec{E}^2 - \vec{B}^2} \leqslant b$. Овде новоуведена константа b има смисао максималног интензитета које електромагнетно поље може имати у датој тачки, у пуној аналогији са брзином светлости, c. То се најлакше види у случају електростатике, који је за нас од највећег интереса[3], јер из $\vec{B} = 0$ следи $0 \leqslant |\vec{E}| \leqslant b$.

Овако формулисана електродинамика успешно решава питање дивергенције енергије тачкасте честице, али даје и могућност да се појам тачкасте честице интерпретира на нов начин, као сингуларитет поља, чиме ћемо се позабавити у одељку 2.2.

Пошто је формулисао теорију која има тражену особину коначности укупне енергије тачкасте честице, Born је, у сарадњи са Infeldом, отишао корак даље у покушају да формулише нову коваријантну теорију поља која би на релативно природан начин ујединила електромагнетну и гравитациону интеракцију[4]. Born и Infeld тако полазе од (мање више ad hoc[5]) облика за лагранжијан:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\det\left[a_{\mu\nu}\right]}$$

и анализирањем уведеног тензора $a_{\mu\nu}$ низом аргумената стижу до лагранжијана који има облик:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{BI}} \stackrel{\text{деф}}{=} \frac{1}{4\pi}b^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\vec{E}^2 - \vec{B}^2}{b^2} - \frac{(\vec{E}\cdot\vec{B})^2}{b^4}}\right), \tag{1.2}$$

и који представља лагранжијан Born-Infeldове електродинамике. Треба запазити да се овај лагранжијан разликује од Bornовог лагранжијана по додатном сабирку под кореном.

Једна неочекивана особина Born-Infeldовог лагранжијана је инваријантност на дуалне трансформације (коју ћемо размотрити у глави 3). Као што ће се видети, ова особина комбинована са постојањем сингуларних решења теорије (одељак 2.2) имплицира постојање магнетних монопола у теорији. Born, међутим, није веровао да магнетни монополи постоје, па је напустио овај облик лагранжијана и окренуо се нелинеарним теоријама које немају дуалну симетрију.

Са друге стране, у скоријим истраживањима у теорији суперструна Born-Infeldов лагранжијан се "природно" јавља као део ефективне теорије [3], и притом симетрија дуалности игра важну улогу. Тиме је Born-Infeldова теорија поново "оживела" и од значаја је да се испита њена математичка структура, са нагласком на дуалној симетрији.

---

[2]Наравно, овај услов је могуће испунити само ако је $\vec{E}^2 \geqslant \vec{B}^2$. Но, нас заправо највише интересује случај електростатике, $\vec{B} = 0$.

[3]Укупна енергија електромагнтетног поља тачкасте честице се најлакше рачуна у систему референце у коме честица мирује, а тамо је $\vec{B} = 0$, тј. имамо само електростатичко поље $\vec{E}(\vec{r})$.

[4]У то време још увек се није знало за јаку и слабу интеракцију, па је уједињење електромагнетизма и гравитације представљало један од главних теоријских циљева којима се тежило.

[5]Изворно, Born и Infeld су сматрали [1] да је овај облик лагранжијана најопштији могући који задовољава услов опште коваријантности, но убрзо се испоставило да то није случај [2], чиме се оправдава придев ad hoc.

Глава 2

BORN-INFELDОВА ЕЛЕКТРОДИНАМИКА

У овој глави ћемо се позабавити основним особинама и неким битним резултатима Born-Infeldове теорије (без разматрања симетрије дуалности коју остављамо за главу 3).

У одељку 2.1 ћемо дискутовати лагранжијан, коваријантност, једначине динамике (записане у разним облицима), гејџ симетрију и облик тензора енергије–импулса.

Користећи се овим резултатима, у одељку 2.2 ћемо извести два значајна резултата теорије и дати им физичку интерпретацију. Први резултат представља одсуство тзв. "birefringence" ефекта, а други постојање сингуларних решења са конвергентном укупном енергијом електромагнетног поља.

2.1 Формулација теорије

Лагранжијан

$$\mathcal{L}_{\mathrm{BI}} \overset{\text{деф}}{=} \sqrt{-g}\,\frac{b^2}{4\pi}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{b^2}\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\left(\frac{1}{b^2}\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\star F^{\mu\nu}\right)^2}\right) \tag{2.1}$$

при чему је $b \in \mathbb{R}$ димензиона константа. Овај лагранжијан[1] се може написати у једноставнијем облику ако се сетимо дефиниција скаларних инваријанти:

$$I_1 = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \vec{B}^2 - \vec{E}^2, \qquad I_2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\star F^{\mu\nu} = \vec{E}\cdot\vec{B}, \tag{2.2}$$

и ако уведемо смене:

$$F \overset{\text{деф}}{=} \frac{I_1}{b^2} = \frac{\vec{B}^2-\vec{E}^2}{b^2}, \qquad G \overset{\text{деф}}{=} \frac{I_2}{b^2} = \frac{\vec{E}\cdot\vec{B}}{b^2}. \tag{2.3}$$

Лагранжијан (2.1) тада постаје

$$\mathcal{L}_{\mathrm{BI}} = \sqrt{-g}\,\frac{b^2}{4\pi}\left(1-\sqrt{1+F-G^2}\right). \tag{2.4}$$

[1] Стриктно говорећи, ово *није* лагранжијан (односно густина лагранжијана) све док се експлицитно не уврсти

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad \text{и} \qquad F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\left(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho\right).$$

Такође, види се да лагранжијан не зависи од поља A_μ, већ само од његових извода.

Константа b има димензије јачине поља (тј. m^{-2}) и обезбеђује да F и G буду бездимензиони. Очекујемо да има физички смисао максималног интензитета поља, али њена нумеричка вредност ће бити процењена касније (у одељку 2.2). Засад ћемо само да констатујемо да је $b \neq 0$ и да договорно фиксирамо да буде $b > 0$ (максимални интензитет поља треба да буде позитиван!), јер фигурише квадратично у лагранжијану (тј. лагранжијан је инваријантан на замену $b \to b' = -b$, па имамо слободу да одаберемо знак).

У лимесу $b \to \infty$ теорија се своди на безизворну Maxwellову електродинамику јер лагранжијан постаје:

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty} \mathcal{L}_{\mathrm{BI}} &= \lim_{b\to\infty} \sqrt{-g}\,\frac{b^2}{4\pi}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{I_1}{b^2} - \frac{I_2^2}{b^4}}\right) \\
&= \sqrt{-g}\,\frac{1}{4\pi}\lim_{b\to\infty} b^2\left[1 - \left(1 + \frac{I_1}{2b^2} - \frac{I_2^2}{2b^4} + o(b^{-2})\right)\right] \\
&= \sqrt{-g}\,\frac{1}{4\pi}\lim_{b\to\infty} b^2\left(-\frac{I_1}{2b^2} + \frac{I_2^2}{2b^4}\right) \\
&= \sqrt{-g}\,\frac{1}{4\pi}\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{I_1}{2} + \frac{I_2^2}{2b^2}\right) \\
&= -\sqrt{-g}\,\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \mathcal{L}_{\mathrm{M}}.
\end{aligned}$$

Коваријантност

Из облика (2.4) се јасније види да је дејство

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L}_{\mathrm{BI}} = \int d^4x\, \sqrt{-g}\,\frac{b^2}{4\pi}\left(1 - \sqrt{1 + F - G^2}\right)$$

инваријантно јер су F, G и $d^4x\,\sqrt{-g}$ инваријанте, па је теорија коваријантно формулисана.

Једначине динамике

Једначине динамике поља се добијају из захтева да дејство буде екстремално, тј. из Euler-Lagrangeевих једначина:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} = 0. \tag{2.5}$$

Диференцирањем[2] се добија

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{BI}}}{\partial A_\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{BI}}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} = \sqrt{-g}\,\frac{1}{4\pi}\,\frac{F^{\alpha\mu} + G\,\star F^{\alpha\mu}}{\sqrt{1 + F - G^2}}, \tag{2.6}$$

па се четири једначине динамике своде на:

$$\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,\frac{F^{\alpha\mu} + G\,\star F^{\alpha\mu}}{\sqrt{1 + F - G^2}}\right) = 0. \tag{2.7}$$

[2]Директно диференцирање лагранжијана (2.1) је праволинијско, али дугачко. Но, ако се узме у обзир да је

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\frac{\partial}{\partial F_{\alpha\beta}} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\left(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\right)\frac{\partial}{\partial F_{\alpha\beta}} = 2\frac{\partial}{\partial F_{\mu\nu}}$$

(ово важи само кад функција која се диференцира зависи искључиво од $F_{\mu\nu}$, тј. не садржи чланове облика $\partial_\mu A_\nu$) као и једначина

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} = 2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial F_{\mu\alpha}} + 2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G}\frac{\partial G}{\partial F_{\mu\alpha}},$$

из лагранжијана у облику (2.4) и једначина (2.2) и (2.3) резултат диференцирања може да се види и напамет.

Видимо да теорија није линеарна, што је последица чињенице да лагранжијан (2.1) није квадратична функција поља $F_{\mu\nu}$.

Сем тога, захваљујући чињеници да је $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ идентички су задовољени Bianchijеви идентитети, исто као и у Maxwellовој електродинамици — четири безизворне једначине:

$$\partial_\mu \left(\sqrt{-g} \, \star F^{\alpha\mu} \right) = 0, \tag{2.8}$$

које јесу линеарне.

Прва ствар коју треба прокоментарисати је да се једначине динамике (2.7) могу експлицитним диференцирањем записати у облику

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} \, F^{\alpha\mu} \right) = 4\pi j^\alpha, \tag{2.9}$$

уз идентификацију

$$j^\alpha \overset{\text{деф}}{=} -\frac{1}{4\pi} \sqrt{1+F-G^2} \left[F^{\alpha\mu} \partial_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{1+F-G^2}} \right) + \star F^{\alpha\mu} \partial_\mu \left(\frac{G}{\sqrt{1+F-G^2}} \right) \right]. \tag{2.10}$$

Овај облик једначина динамике је по форми идентичан Maxwellовим једначинама динамике са изворима[3], с том разликом што је квадривектор густине струје електромагнетног порекла, тј. зависи (нелинеарно) од поља $F_{\mu\nu}$ у датој тачки. Другим речима, једначине динамике имају облик (2.9) у вакууму, тј. у одсуству честица материје (односно извора неелектромагнетног порекла). То значи да се у теорији јавља самоинтеракција, што се могло и очекивати због њене нелинеарности.

Друга ствар коју ваља прокоментарисати представља тровекторски запис једначина (2.7). У том циљу, дефинишимо тензор индукције $H^{\alpha\mu}$ као:

$$H^{\alpha\mu} \overset{\text{деф}}{=} \frac{F^{\alpha\mu} + G \star F^{\alpha\mu}}{\sqrt{1+F-G^2}}. \tag{2.11}$$

Једначине динамике добијају облик:

$$\partial_\mu \left(\sqrt{-g} \, H^{\alpha\mu} \right) = 0. \tag{2.12}$$

Специјално, одаберимо координатни систем у коме је $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ па је $\sqrt{-g} = 1$. У том случају могу се дефинисати тровектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$ преко компоненти тензора $F_{\mu\nu}$ и једначине (5), као и тровектори $\vec{D}$ и $\vec{H}$ преко компоненти тензора $H_{\mu\nu}$ (чији је матрични облик потпуно аналоган (5)). Скаларни производ тровектора, "$\cdot$", постаје идентичан обичном скаларном производу из тродимензионалног еуклидског простора. Сада једначине (2.12) могу да се запишу у тровекторском облику, који је потпуно аналоган Maxwellовим једначинама у материјалној средини:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \qquad \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = 0, \tag{2.13}$$

док Bianchijеви идентитети (2.8) добијају познат облик:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \qquad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0. \tag{2.14}$$

Из овог облика једначина се види да, као у Maxwellовој електродинамици, важе све интегралне теореме, што у општем случају не бисмо очекивали од нелинеарне теорије. Нелинеарност је овде

[3] Подсетимо се, Maxwellове једначине са изворима се добијају из лагранжијана:

$$\mathcal{L} = -\sqrt{-g} \, \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \, j^\mu A_\mu .$$

Квадривектор густине струје овде зависи од x^μ и *не зависи* ни од A_μ ни од $\partial_\mu A_\nu$, што значи да су извори поља *неелектромагнетног* порекла.

"сакривена" у тзв. *конститутивним*[4] једначинама (2.11) које у тровекторској нотацији добијају облик:

$$\vec{D} \overset{\text{деф}}{=} \frac{\vec{E}+G\vec{B}}{\sqrt{1+F-G^2}}, \qquad \vec{H} \overset{\text{деф}}{=} \frac{\vec{B}-G\vec{E}}{\sqrt{1+F-G^2}}. \tag{2.15}$$

Ове једначине, иако нелинеарне, могу да се реше по $\vec{E}$ и $\vec{B}$ у функцији $\vec{D}$ и $\vec{H}$ што је својеврсна (и веома корисна) особина Born-Infeldове теорије. Решавање се изводи на следећи начин. Најпре коришћењем једначина (2.15) покажимо да важи[5]:

$$\vec{D}\cdot\vec{H} = \vec{E}\cdot\vec{B}. \tag{2.16}$$

Заиста,

$$\begin{aligned}\vec{D}\cdot\vec{H} &= \frac{(\vec{E}+G\vec{B})\cdot(\vec{B}-G\vec{E})}{1+F-G^2} = \frac{\vec{E}\cdot\vec{B}+G(\vec{B}^2-\vec{E}^2)-G^2\vec{E}\cdot\vec{B}}{1+F-G^2} = \\ &= \frac{b^2G+Gb^2F-G^2b^2G}{1+F-G^2} = b^2G\frac{1+F-G^2}{1+F-G^2} = b^2G = \\ &= \vec{E}\cdot\vec{B}.\end{aligned}$$

На основу овога сада добијамо да је:

$$G \equiv \frac{\vec{E}\cdot\vec{B}}{b^2} = \frac{\vec{D}\cdot\vec{H}}{b^2}.$$

Затим дефинишемо скалар:

$$H \overset{\text{деф}}{=} -\frac{1}{b^2}\frac{1}{2}H^{\mu\nu}H_{\mu\nu} = -\frac{\vec{H}^2-\vec{D}^2}{b^2}$$

по аналогији[6] са првом једначином (2.3). Замењивањем (2.15) у овај израз добија се једначина која везује F, G и H и која се уз мало алгебре може записати у облику:

$$\sqrt{1+F-G^2} = \frac{1+G^2}{\sqrt{1+H-G^2}}.$$

Сада се овај идентитет примени на систем (2.15) чиме он постаје *линеаран* по $\vec{E}$ и $\vec{B}$ и решава се у пар потеза. Резултат је:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}-G\vec{H}}{\sqrt{1+H-G^2}}, \qquad \vec{B} = \frac{\vec{H}+G\vec{D}}{\sqrt{1+H-G^2}}. \tag{2.17}$$

Запазити да ове једначине по облику много личе на (2.15).

Гејџ симетрија

Чињеница да електромагнетно поље $F_{\mu\nu}$ описујемо користећи потенцијал A_μ једначином

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

обезбеђује постојање гејџ симетрије без обзира на конкретан облик лагранжијана. То значи да се она јавља на исти начин и у Born-Infeldовој и у Maxwellовој електродинамици.

Наиме, гејџ трансформација потенцијала

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$$

[4] У електродинамици материјалних средина једначине које везују $\vec{D}$ и $\vec{H}$ са $\vec{E}$ и $\vec{B}$ се зову "конститутивне једначине" и дефинишу одзив средине (индукцију) на побуђење (поље).

[5] Ово је веома битна особина конститутивних једначина. Као што ћемо показати у глави 3, ова једначина представља потребан и довољан услов да теорија поседује дуалну симетрију.

[6] Аналогија није сасвим комплетна! Обрати пажњу на разлику у минусу!

није опсевабилна, јер се поље не мења:

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu A_\nu + \partial_\mu \partial_\nu f - \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu \partial_\mu f = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}.$$

Ово значи да имамо гејџ симетрију у теорији и да избор потенцијала није једнозначан за задату конфигурацију поља. То нам омогућава да на потенцијал наметнемо још неки додатни услов (тзв. калибрациони услов), као на пример:

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{2.18}$$

Тензор енергије–импулса

Израз за тензор енергије–импулса следи из теореме Emmy Noether и у случају векторског (у нашем случају електромагнетног) поља гласи:

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} \partial_\nu A_\alpha - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}.$$

Пошто овако написан тензор није симетричан, трансформишемо га на следећи начин:

$$\begin{aligned}
T^\mu{}_\nu &= 2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\alpha}} \partial_\nu A_\alpha - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} && \text{због} \quad \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} \equiv 2\frac{\partial}{\partial F_{\mu\alpha}}, \\
&= 2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\alpha}} (F_{\nu\alpha} - \partial_\alpha A_\nu) - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} && \text{због} \quad F_{\nu\alpha} \equiv \partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu, \\
&= 2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\alpha}} F_{\nu\alpha} - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} - 2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\alpha}} \partial_\alpha A_\nu, \\
&= 2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\alpha}} F_{\nu\alpha} - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} - \partial_\alpha \left(2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\alpha}} A_\nu \right) + 2A_\nu \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\alpha}} && \text{због} \quad f\,\partial_\mu g \equiv \partial_\mu (fg) - g\,\partial_\mu f.
\end{aligned}$$

Претпоследњи члан је дивергенција и сме се избацити, а последњи члан је:

$$2A_\nu \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\alpha}} = -2A_\nu \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\mu}} = -A_\nu \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\mu)} = 0$$

према једначинама динамике (2.5), под претпоставком да лагранжијан не зависи од потенцијала A_μ. Дакле, следи:

$$T^\mu{}_\nu = 2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\alpha}} F_{\nu\alpha} - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}.$$

Овај облик још увек није манифестно симетричан. У нашем случају ($\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{BI}}$) је:

$$2\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{BI}}}{\partial F_{\mu\alpha}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{BI}}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} = \frac{\sqrt{-g}}{4\pi} \frac{F^{\alpha\mu} + G \star F^{\alpha\mu}}{\sqrt{1 + F - G^2}},$$

(друга једначина у (2.6)), па је:

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\sqrt{-g}}{4\pi} \frac{F^{\alpha\mu} + G \star F^{\alpha\mu}}{\sqrt{1 + F - G^2}} F_{\nu\alpha} - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}.$$

Директним израчунавањем (тј. сумирањем по компонентама) показује се да важи следећи идентитет:

$$\star F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} = I_2 \delta^\mu{}_\nu, \tag{2.19}$$

па се заменом у горњу једначину добија:

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\sqrt{-g}}{4\pi} \frac{F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + G I_2 \delta^\mu{}_\nu}{\sqrt{1 + F - G^2}} - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}. \tag{2.20}$$

Тензор енергије–импулса је сада и манифестно симетричан, и у том облику ћемо га касније користити.

2.2 Основни резултати

У овом одељку ћемо размотрити два основна резултата који се јављају у Born-Infeldовој електродинамици. Први је везан за простирање електромагнетних таласа у вакууму и састоји се у одсуству тзв. "birefingence" ефекта, док је други везан за електростатику вакуума и састоји се у постојању сингуларних решења са коначном енергијом и наелектрисањем.

Birefringence ефекат

Birefringence ефекат је, кратко, појава зависности групне брзине простирања таласа од типа њихове поларизације.

Да бисмо демонстрирали одсуство ефекта у Born-Infeldовој електродинамици, морамо размотрити нешто општију теорију, у којој поменути ефекат може да се јави. Нека је лагранжијан те "општије" електродинамике $\mathcal{L}$, и претпоставимо да је коваријантно формулисан (то у принципу увек захтевамо од електродинамике). Хоћемо да израчунамо групну брзину простирања равних монохроматских електромагнетних таласа у вакууму, у присуству неког спољашњег (такође електромагнетног) поља. То се ради тако што се за лагранжијан $\mathcal{L}$ (чији функционални облик није задат — тиме се постиже довољна "општост" разматрања...) уради следеће:

- линеаризују се једначине динамике (амплитуда осциловања поља у таласу се сматра "малом", па се једначине развијају у ред и апроксимирају);
- потражи се решење у облику стандардном за равне монохроматске таласе;
- израчуна се дисперзиона једначина;
- израчуна се групна брзина простирања таласа.

Идемо редом. Једначине динамике се у принципу могу добити из Hamiltonовог принципа, тј. из захтева да је варијација дејства једнака нули:

$$\delta S \equiv \delta \int d^4x \ \mathcal{L} = 0.$$

Захтев да оне буду коваријантне еквивалентан је захтеву да дејство буде инваријанта, тј. скалар. То ће заиста и бити ако је $d^4x\mathcal{L}$ инваријанта. Како је $d^4x\sqrt{-g}$ инваријанта, лагранжијан $\mathcal{L}$ мора бити облика $\mathcal{L} = \sqrt{-g}\, I$ где је I нека инваријанта електромагнетног поља. На основу теореме из додатка A, I се може записати као функција две основне инваријанте I_1 и I_2 (дефинисане једначинама (2.2)). Следи да наш лагранжијан $\mathcal{L}$, који нисмо задали експлицитно, мора због услова коваријантности да буде функција само две променљиве[7]:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\ \Phi\ (\ I_1\ ,\ I_2\ ) = \mathcal{L}\ (\ I_1\ ,\ I_2\ ). \tag{2.21}$$

Пошто смо ово установили, једначине динамике можемо добити (формалним) диференцирањем, користећи Euler-Lagrangeеве једначине (2.5).

Линеаризацију једначина динамике изводимо на следећи начин. Једноставности ради, изаберимо координатни систем у коме је $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Поље $F_{\mu\nu}$ разбијамо на позадинско поље $F^{(0)}_{\mu\nu}$ (за које претпостављамо да је константно[8] и да задовољава једначине динамике) и пертурбацију $F^{(1)}_{\mu\nu}$ (за коју претпостављамо да је малог интензитета у поређењу са позадинским пољем):

$$F_{\mu\nu} = F^{(0)}_{\mu\nu} + F^{(1)}_{\mu\nu}.$$

[7] Још једна претпоставка коју подразумевамо је да квант електромагнетне интеракције (фотон) нема масу, тј. да у лагранжијану не постоји члан облика $\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$, нити да у лагранжијану уопште фигурише квадривектор потенцијала A_μ на било који начин, већ само његови изводи, и то само у комбинацијама $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

[8] Ово претпостављамо само да бисмо поједноставили рачунање. Цело разматрање је могуће извести (знатно компликованијим методама) и без те претпоставке [4].

Хоћемо да једначине динамике развијемо у ред до линеарних чланова по пертурбацији. Еквивалентно, можемо развити лагранжијан у ред до другог реда по пертурбацији, па затим из њега конструисати једначине динамике. Дакле,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\Big|_{F^{(0)}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}\Big|_{F^{(0)}} F^{(1)}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial F_{\rho\sigma}\partial F_{\mu\nu}}\Big|_{F^{(0)}} F^{(1)}_{\rho\sigma}F^{(1)}_{\mu\nu} + o(F^2_{(1)})$$

Имајући у виду (2.21) и (2.2), и уводећи смене:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= \Phi(I_1,I_2)\Big|_{F^{(0)}}, & \mathcal{L}_1 &= \frac{\partial\Phi}{\partial I_1}\Big|_{F^{(0)}}, & \mathcal{L}_2 &= \frac{\partial\Phi}{\partial I_2}\Big|_{F^{(0)}}, \\
\mathcal{L}_{11} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1\partial I_1}\Big|_{F^{(0)}}, & \mathcal{L}_{12} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1\partial I_2}\Big|_{F^{(0)}}, & \mathcal{L}_{22} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial I_2\partial I_2}\Big|_{F^{(0)}},
\end{aligned}$$

након мало гломазних посредних диференцирања следи ништа мање гломазан резултат:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \left[\mathcal{L}_1 F^{\mu\nu}_{(0)} - \tfrac{1}{2}\mathcal{L}_2 \star F^{\mu\nu}_{(0)}\right] F^{(1)}_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}_1 F^{(1)}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{(1)} - \tfrac{1}{4}\mathcal{L}_2 F^{(1)}_{\mu\nu}\star F^{\mu\nu}_{(1)} + \\
&+ \tfrac{1}{2}\left[\mathcal{L}_{11}F^{\mu\nu}_{(0)}F^{\rho\sigma}_{(0)} + \tfrac{1}{4}\mathcal{L}_{22}\star F^{\mu\nu}_{(0)}\star F^{\rho\sigma}_{(0)} - \tfrac{1}{2}\mathcal{L}_{12}\left(F^{\mu\nu}_{(0)}\star F^{\rho\sigma}_{(0)} + \star F^{\mu\nu}_{(0)}F^{\rho\sigma}_{(0)}\right)\right] F^{(1)}_{\mu\nu}F^{(1)}_{\rho\sigma}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Сада треба из овог лагранжијана извести једначине динамике. Притом је:

$$\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F^{(1)}_{\alpha\beta}} = \partial_\alpha \left[\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial F^{(1)}_{\alpha\beta}}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}\right] = \partial_\alpha \left[\delta^\alpha{}_\mu \delta^\beta{}_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}\right] = \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}} = 0$$

на основу једначина динамике и претпоставке да је $F^{(0)}_{\mu\nu}$ константно, па једначине динамике добијамо диференцирањем само по $F^{(1)}_{\alpha\beta}$. Обратимо пажњу сада на (2.22). Најпре, први сабирак на десној страни је константан, па се може избацити. Затим, пошто су фактори у средњим заградама константни, диференцирање по $F^{(1)}_{\mu\nu}$ праћено диференцирањем по координатама анулира други сабирак, па се и он може избацити. Четврти сабирак је четвородивергенција:

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{4}\mathcal{L}_2 F^{(1)}_{\mu\nu}\star F^{\mu\nu}_{(1)} &= -\frac{1}{4}\mathcal{L}_2 \star F^{\mu\nu}_{(1)}\left(\partial_\mu A^{(1)}_\nu - \partial_\nu A^{(1)}_\mu\right) \\
&= -\frac{1}{2}\mathcal{L}_2 \star F^{\mu\nu}_{(1)}\partial_\mu A^{(1)}_\nu \\
&= \partial_\mu\left(-\frac{1}{2}\mathcal{L}_2 \star F^{\mu\nu}_{(1)}A^{(1)}_\nu\right) + \frac{1}{2}A^{(1)}_\nu \mathcal{L}_2 \partial_\mu\left(\star F^{\mu\nu}_{(1)}\right) \\
&= \partial_\mu\left(-\frac{1}{2}\mathcal{L}_2 \star F^{\mu\nu}_{(1)}A^{(1)}_\nu\right)
\end{aligned}$$

(види једначину (2.8)), па се и тај члан може избацити. Преостају трећи и пети сабирак, и они дају ненулти допринос у једначинама динамике. Све у свему, лагранжијан за линеаризовану теорију се ефективно може писати као:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_1 F^{(1)}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{(1)} + \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}_{11}F^{\mu\nu}_{(0)}F^{\rho\sigma}_{(0)} + \frac{1}{4}\mathcal{L}_{22}\star F^{\mu\nu}_{(0)}\star F^{\rho\sigma}_{(0)} - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{12}\left(F^{\mu\nu}_{(0)}\star F^{\rho\sigma}_{(0)} + \star F^{\mu\nu}_{(0)}F^{\rho\sigma}_{(0)}\right)\right] F^{(1)}_{\mu\nu}F^{(1)}_{\rho\sigma}.$$

Диференцирањем се добијају следеће (линеаризоване!) једначине динамике:

$$\mathcal{L}_1\partial_\alpha F^{\alpha\beta}_{(1)} + \left[\mathcal{L}_{11}F^{\mu\nu}_{(0)}F^{\alpha\beta}_{(0)} + \frac{1}{4}\mathcal{L}_{22}\star F^{\mu\nu}_{(0)}\star F^{\alpha\beta}_{(0)} - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{12}\left(F^{\mu\nu}_{(0)}\star F^{\alpha\beta}_{(0)} + \star F^{\mu\nu}_{(0)}F^{\alpha\beta}_{(0)}\right)\right]\partial_\alpha F^{(1)}_{\mu\nu} = 0 \tag{2.23}$$

Други корак је решавање ових једначина. Решење тражимо у облику (равни монохроматски таласи):

$$A_\mu = \mathcal{E}_\mu e^{-ik_\nu x^\nu} \equiv \mathcal{E}_\mu e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \tag{2.24}$$

где је $\mathcal{E}_\mu$ константна амплитуда, а k_μ таласни квадривектор.

Анализом израза у угластим заградама једначине (2.23) видимо да је цела заграда антисиметрична по индексима μ и ν:

$$\Big[\qquad\Big]^{\mu\nu\alpha\beta} = -\Big[\qquad\Big]^{\nu\mu\alpha\beta},$$

па пошто је $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ имамо:

$$\Big[\qquad\Big]^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha F_{\mu\nu} = \Big[\qquad\Big]^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\mu A_\nu + \Big[\qquad\Big]^{\nu\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\nu A_\mu = 2\Big[\qquad\Big]^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\mu A_\nu.$$

Ако сада заменимо (2.24) у (2.23), следи:

$$\mathcal{L}_1 k^2 \mathcal{E}^\beta - \mathcal{L}_1 k^\beta k_\alpha \mathcal{E}^\alpha + 2\Big[\qquad\Big]^{\mu\nu\alpha\beta} k_\alpha k_\mu \mathcal{E}_\nu = 0.$$

Затим, из (2.18) следи $k_\alpha \mathcal{E}^\alpha = 0$, па други сабирак отпада. Ако још амплитуду $\mathcal{E}_\nu$ извадимо испред заграде користећи једначину $\mathcal{E}^\beta = \eta^{\nu\beta}\mathcal{E}_\nu$ и уведемо смене

$$a^\nu \overset{\text{деф}}{=} k_\mu F^{\mu\nu}_{(0)}, \qquad \star a^\nu \overset{\text{деф}}{=} k_\mu \star F^{\mu\nu}_{(0)},$$

добијамо:

$$\left[\mathcal{L}_1 k^2 \eta^{\nu\beta} + 2\mathcal{L}_{11} a^\nu a^\beta + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{22} \star a^\nu \star a^\beta - \mathcal{L}_{12}\left(a^\nu \star a^\beta + \star a^\nu a^\beta\right)\right]\mathcal{E}_\nu = 0. \tag{2.25}$$

Крађом анализом ове једначине видимо да је $\mathcal{E}_\mu$ линеарна комбинација (линеарно независних) квадривектора a_μ и $\star a_\mu$. Зато решење тражимо у облику:

$$\mathcal{E}_\mu = C_1 a_\mu + C_2 \star a_\mu,$$

па заменом и изједначавањем коефицијената уз a_μ и $\star a_\mu$ са нулом, добијамо[9] следећи систем једначина:

$$\begin{array}{rcrcl}
\left[\left(\frac{k}{a}\right)^2\left(1 + \frac{\mathcal{L}_{12}}{\mathcal{L}_1}I_2\right) + 2\frac{\mathcal{L}_{11}}{\mathcal{L}_1}\right] C_1 & + & \left[\left(\frac{k}{a}\right)^2\left(\frac{\mathcal{L}_{12}}{\mathcal{L}_1}I_1 - 2\frac{\mathcal{L}_{11}}{\mathcal{L}_1}I_2\right) - \frac{\mathcal{L}_{12}}{\mathcal{L}_1}\right] C_2 & = & 0, \\
\left[\left(\frac{k}{a}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}_{22}}{\mathcal{L}_1}I_2\right) - \frac{\mathcal{L}_{12}}{\mathcal{L}_1}\right] C_1 & + & \left[\left(\frac{k}{a}\right)^2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}_{22}}{\mathcal{L}_1}I_1 + \frac{\mathcal{L}_{12}}{\mathcal{L}_1}I_2\right) + \frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}_{22}}{\mathcal{L}_1}\right] C_2 & = & 0.
\end{array} \tag{2.26}$$

Да би овај хомоген систем имао нетривијално решење, детерминанта мора бити једнака нули, што даје биквадратну једначину:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{k}{a}\right)^4\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}_{22}}{\mathcal{L}_1}I_1 + 2\frac{\mathcal{L}_{12}}{\mathcal{L}_1}I_2 - \frac{\mathcal{L}_{11}\mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{12}^2}{\mathcal{L}_1^2}I_2^2\right] + \\
&+ \left(\frac{k}{a}\right)^2\left[2\frac{\mathcal{L}_{11}}{\mathcal{L}_1} + \frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}_{22}}{\mathcal{L}_1} - \frac{\mathcal{L}_{11}\mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{12}^2}{\mathcal{L}_1^2}I_1\right] + \left[\frac{\mathcal{L}_{11}\mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{12}^2}{\mathcal{L}_1^2}\right] = 0
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Трећи корак је решавање једначине (2.27) чиме добијамо дисперзиону једначину простирања електромагнетних таласа у вакууму (и у присуству спољњег константног и евентуално јаког електромагнетног поља $F^{(0)}_{\mu\nu}$). Тачније, добијамо *две* (!!!) дисперзионе једначине:

$$k^2 = a^2 \lambda_\pm,$$

[9] Овде су коришћени следећи идентитети:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k} = \star\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k} = 0, \qquad \star\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = -I_2 k^2, \qquad \star\boldsymbol{a}^2 = a^2 - I_1 k^2,$$

који се доказују директним израчунавањем.

где се $\lambda_\pm$ добија директним решавањем (2.27):

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}_{22}}{\mathcal{L}_1}I_1 + 2\frac{\mathcal{L}_{12}}{\mathcal{L}_1}I_2 - \Gamma I_2^2\right)^{-1}\left(-2\frac{\mathcal{L}_{11}}{\mathcal{L}_1} - \frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}_{22}}{\mathcal{L}_1} + \Gamma I_1 \pm \Delta^{\frac{1}{2}}\right), \tag{2.28}$$

$$\Gamma \stackrel{\text{деф}}{=} \frac{\mathcal{L}_{11}\mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{12}^2}{\mathcal{L}_1^2}, \qquad \Delta = \left(2\frac{\mathcal{L}_{11}}{\mathcal{L}_1} - \frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}_{22}}{\mathcal{L}_1} - \Gamma I_1\right)^2 + \left(2\frac{\mathcal{L}_{12}}{\mathcal{L}_1} - 2\Gamma I_2\right)^2.$$

Пошто је дискриминанта Δ увек већа или једнака нули, следи да (осим у специјалним случајевима $\Delta = 0$ или $a = 0$) увек имамо две различите дисперзионе једначине за простирање електромагнетних таласа у вакууму.

Ова чињеница има нетривијалне последице, и једна од њих се састоји у томе да постоје две *различите* групне брзине простирања таласа (четврти корак). То се види ако се сетимо да се групна брзина простирања таласа дефинише једначином:

$$c \stackrel{\text{деф}}{=} \frac{\partial k^t}{\partial \|k^i \mathbf{e}_i\|} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial |\vec{k}|},$$

па ако имамо две различите дисперзионе једначине, имамо и две различите групне брзине простирања таласа. У основи, којом ће се брзином талас простирати зависи од тога да ли систем (2.26) решавамо задовољавајући једну или другу дисперзиону једначину, тј. експериментално гледано, брзина светлости зависи од облика поларизације. Ова појава се на енглеском зове *birefringence*[10].

Наравно, сада пошто смо демонстрирали ефекат, природно се поставља питање: за које лагранжијане се овај ефекат неће јавити, тј. какав треба да буде лагранжијан да би одговарајућа теорија предвиђала постојање само једне брзине светлости?

Одговор на ово питање се добија захтевањем да у теорији немамо две, већ једну дисперзиону једначину. Једним погледом на (2.28) видимо да ће то бити случај ако је дискриминанта биквадратне једначине једнака нули: $\Delta = 0$. Пошто је Δ збир квадрата, тај захтев нас доводи до следеће две једначине:

$$2\frac{\mathcal{L}_{11}}{\mathcal{L}_1} - \frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}_{22}}{\mathcal{L}_1} - \frac{\mathcal{L}_{11}\mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{12}^2}{\mathcal{L}_1^2}I_1 = 0, \qquad \frac{\mathcal{L}_{12}}{\mathcal{L}_1} - \frac{\mathcal{L}_{11}\mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{12}^2}{\mathcal{L}_1^2}I_2 = 0.$$

Елементарним алгебарским трансформацијама ове једначине се могу свести на облик:

$$2\mathcal{L}_{11} - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{22} - \frac{I_1}{I_2}\mathcal{L}_{12} = 0, \qquad \mathcal{L}_{11}\mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{12}^2 - \frac{1}{I_2}\mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_1 = 0. \tag{2.29}$$

Ово је систем две нелинеарне[11] хомогене парцијалне диференцијалне једначине другог реда по лагранжијану $\mathcal{L}(I_1, I_2)$. Сваки лагранжијан који задовољава овај систем описује електродинамику у којој постоји само једна брзина светлости. Намеће се идеја да решавањем овог система можемо наћи све те лагранжијане.

Та идеја је и реализована [2], и испоставило се да, осим тривијалног решења[12], постоје само два прва интеграла који задовољавају овај систем. То су:

$$\mathcal{L} = \sqrt{1 + I_1 - I_2^2} \qquad \text{и} \qquad \mathcal{L} = \frac{I_1}{I_2}. \tag{2.30}$$

Наравно, систем парцијалних диференцијалних једначина (2.29) не фиксира решење до краја. Треба имати у виду следеће:

- једначине су инваријантне на смену $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = C_1\mathcal{L} + C_2 I_2 + C_3$ где су $C_1 \neq 0$, C_2 и C_3 произвољне константе.

[10] Нисам успео да преведем. Чини ми се да у српском језику не постоји адекватан термин који би ово заменио.
[11] Прва једначина ипак јесте линеарна.
[12] Тривијално решење заправо описује Maxwellову електродинамику, јер су тамо сви други изводи лагранжијана једнаки нули.

- једначине су инваријантне на истовремене смене независно променљивих $I_1 \to I_1' = C_4 I_1$ и $I_2 \to I_2' = C_4 I_2$ (константа $C_4 \neq 0$ је произвољна, али иста за обе независно променљиве!).

Јасно, да би лагранжијан био физички прихватљив, мора испуњавати два услова:

- мора бити димензионо усаглашен и
- мора се сводити на Maxwellов лагранжијан у лимесу слабих поља.

Први захтев нас приморава да, пошто I_1 и I_2 имају димензије квадрата јачине поља (m^{-4}), уведемо константу $C_4 = \frac{1}{b^2}$ са димензијом m^4, јер се у првом од два интеграла I_1 и I_2^2 сабирају са јединицом. Други захтев нас приморава да изаберемо још и $C_1 = -\frac{b^2}{4\pi}$, $C_2 = 0$ и $C_3 = \frac{b^2}{4\pi}$, чиме стижемо до Born-Infeldовог лагранжијана:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{BI}}(I_1, I_2) = \frac{b^2}{4\pi}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{I_1}{b^2} - \frac{I_2^2}{b^4}}\right).$$

Друго решење система (2.29) се никаквим избором константи не може свести на Maxwellов лагранжијан у лимесу слабих поља, те се овом решењу не може приписати физички смисао лагранжијана и стога га одбацујемо.

Закључујемо да Born-Infeldов лагранжијан описује једину могућу нелинеарну теорију електродинамике у којој се не јавља birefringence ефекат[13]. Ово је веома значајан теоријски резултат, јер је брзина светлости експериментално мерљива величина, па пошто сви досадашњи експерименти указују да она не зависи од облика поларизације, једине две теорије које се могу сматрати фундаменталним су Maxwellова и Born-Infeldова. Сем тога, при моделирању својстава супстанцијалних средина, Born-Infeldова теорија може имати велику примену баш због одсуства birefringence ефекта.

Сингуларна решења

Born-Infeldову теорију смо досад формулисали у вакууму, тј. тако да нема извора поља. Будући нелинеарна, теорија предвиђа нетривијалне конфигурације електромагнетног поља у вакууму, без присуства спољашњих извора који би такву конфигурацију генерисали. Таква решења једначина динамике се зову *сингуларна решења* или *сингуларитети*.

Облик једначине (2.9) сугерише да се Maxwellова теорија *са изворима* може схватити као специјалан случај[14] Born-Infeldове уколико се претпостави да су сви извори поља које срећемо у Maxwellовој теорији заправо електромагнетног порекла (једначина (2.10)). Пошто су извори електромагнетног поља у крајњој линији елементарне честице, нас занима да ли су у Born-Infeldовој теорији могуће конфигурације поља *у вакууму* такве да "личе" на поља генерисана елементарним честицама у Maxwellовој теорији.

Конкретности ради, размотримо електрон, наелектрисања $Q = -e$, који мирује у вакууму. У Maxwellовој теорији, он око себе генерише електростатичко поље које опада са квадратом удаљености од електрона (Coulombов закон), док је магнетно поље једнако нули:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{e}{r^2}\mathbf{e}_r, \qquad \vec{B}(\vec{r}, t) = 0. \tag{2.31}$$

(електрон смо поставили у тачку $\vec{r} = 0$, тј. у координатни почетак). Видимо да је поље у потпуности електричног типа, сферносиметрично, и да не зависи од времена.

Нас, дакле, занима да ли ове особине можемо да "имитирамо" неким сингуларним решењем једначина (2.13), (2.14) и (2.15). Другим речима, занима нас да ли Born-Infeldове једначине предвиђају сингуларитет са овим особинама.

[13] Наравно, ефекат се не јавља ни у Maxwellовој теорији (Maxwellов лагранжијан тривијално задовољава једначине 2.29), али она је линеарна с једне, и сасвим позната и изучена с друге стране.

[14] Овде треба нагласити да смо у одељку 2.1 доказали да се Born-Infeldов лагранжијан у лимесу $b \to \infty$ своди на Maxwellов лагранжијан *безизворне* електродинамике. О Maxwellовој теорији која садржи изворе није било речи на ту тему.

Изаберимо координатни систем у коме је $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Наметањем услова:

$$\vec{B} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = 0,$$

следи $G = 0$, па се једначине динамике поља (2.13) и (2.14) своде на:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \tag{2.32}$$

док се веза између $\vec{E}$ и $\vec{D}$ своди на:

$$\vec{D} = \frac{\vec{E}}{\sqrt{1 - \frac{1}{b^2}\vec{E}^2}}, \qquad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\sqrt{1 + \frac{1}{b^2}\vec{D}^2}}. \tag{2.33}$$

Решење тражимо у сферносиметричном облику $\vec{D}(\vec{r}) = D(r)\mathbf{e}_r$. Заменом у прву од једначина (2.32) добијамо:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 D(r)\right) = 0,$$

одакле следи:

$$D(r) = \frac{A}{r^2}, \qquad \vec{D}(\vec{r}) = \frac{A}{r^2}\mathbf{e}_r. \tag{2.34}$$

Овде је A константа интеграције, чији ћемо физички смисао сада утврдити, а затим из граничних услова (2.31) израчунати (тј. задати) и њену вредност. Но пре тога израчунајмо вектор електричног поља. Из (2.33) следи:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{A}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{A^2}{b^2 r^4}}}\mathbf{e}_r = \frac{A}{\sqrt{r^4 + \frac{A^2}{b^2}}}\mathbf{e}_r = \frac{A}{\sqrt{r^4 + r_0^4}}\mathbf{e}_r, \tag{2.35}$$

при чему је $r_0 \overset{\text{деф}}{=} \sqrt{\frac{|A|}{b}}$.

Да бисмо дали физичку интерпретацију константи A, сетимо се поново да смо у делу 2.1 утврдили да једначине динамике можемо записати у облику (2.9), при чему је j^μ квадривектор густине струје електромагнетног порекла. У електростатичком случају који овде разматрамо из (2.10) се јасно види да је $\vec{j} = 0$, док ρ можемо најлакше израчунати из једначине

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho,$$

која следи из (2.9). Дакле:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2 E(r) = \frac{A}{4\pi r^2}\frac{d}{dr}\frac{r^2}{\sqrt{r_0^4 + r^4}}. \tag{2.36}$$

Укупно ефективно наелектрисање које се јавља је:

$$\begin{aligned}
Q &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}\, \rho(\vec{r}) = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, r^2 \sin\theta \frac{A}{4\pi}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\frac{r^2}{\sqrt{r_0^4 + r^4}} = \\
&= \frac{A}{4\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr \frac{d}{dr}\frac{r^2}{\sqrt{r_0^4 + r^4}} = \frac{A}{4\pi}4\pi \int_{r=0}^{r=\infty} d\frac{r^2}{\sqrt{r_0^4 + r^4}} = \\
&= A \lim_{r\to\infty}\frac{r^2}{\sqrt{r_0^4 + r^4}} - A \underbrace{\lim_{r\to 0}\frac{r^2}{\sqrt{r_0^4 + r^4}}}_{0} = A \lim_{r\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{r_0^4}{r^4} + 1}} = \\
&= A.
\end{aligned}$$

Одавде се види да константа интеграције A има физички смисао наелектрисања.

Пошто смо то утврдили и израчунали облик траженог сферносиметричног електростатичког поља, наметнимо на њега граничне услове (2.31). Када посматрамо поље далеко од сингуларитета (који се налази у координатном почетку), тј. лимес $r \to \infty$, константа r_0 постаје занемарљива у поређењу са r, па електрично поље поприма облик:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{A}{r^2}\mathbf{e}_r \qquad (r \to \infty).$$

Очекујемо да се на великим растојањима од сингуларитета резултат не разликује од оног који даје Maxwellова теорија, (2.31). Упоређивањем добијамо резултат:

$$\vec{D}(\vec{r}) = -\frac{e}{r^2}\mathbf{e}_r, \qquad \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{e}{\sqrt{r_0^4 + r^4}}\mathbf{e}_r, \tag{2.37}$$

при чему је $r_0 = \sqrt{\frac{e}{b}}$ природна јединица дужине за сингуларитет.

Прокоментаришимо овај резултат. Решавањем Born-Infeldових једначина у вакууму, добили смо једну могућу конфигурацију електромагнетног поља (сингуларитет), која на растојањима много већим од карактеристичног r_0 изгледа исто као Maxwellовско електромагнетно поље генерисано једним електроном. Чак је и укупно наелектрисање (електромагнетног порекла!) једнако $-e$, тј. различито од нуле, иако радимо у вакууму! Намеће се идеја да овај сингуларитет можемо поистоветити са електроном. Но, ако то урадимо, уочавамо и неке нове ефекте.

Први ефекат се састоји у следећем. Како се приближавамо растојањима упоредивим са r_0 електрично поље почиње све више да се разликује од Coulombовог. Како r_0 зависи од b, нумеричку вредност овог растојања можемо знати тек кад проценимо b, што ћемо учинити мало касније. Сада само рецимо унапред да ће то растојање бити веома мало.

Други ефекат се састоји у чињеници да теорија предвиђа одређену расподелу густине наелектрисања електрона, по једначини (2.36). Ово је такође занимљив резултат, јер наелектрисање електрона није концентрисано у једној тачки као што се претпоставља у Maxwellовој теорији, већ је континуирано "размазано" по целом простору, налик случају везаног електрона у атому који срећемо у квантној механици. Ова расподела наелектрисања на неки начин фиксира *унутрашњу структуру* електрона, бар кад су у питању његове електромагнетне особине.

Сада када смо то све размотрили, спремни смо да израчунамо *укупну електромагнетну енергију* оваквог електрона, и да дискутујемо њену конвергенцију, што је и била иницијална мотивација за увођење Born-Infeldове електродинамике.

Пошто је за разматрани сингуларитет $G = 0$ и $\sqrt{-g} = 1$, из (2.20) и (2.4) имамо:

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{4\pi}\frac{F^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu}}{\sqrt{1+F}} - \delta^{\mu}{}_{\nu}\frac{b^2}{4\pi}\left(1 - \sqrt{1+F}\right). \tag{2.38}$$

На основу прве једначине из (2.3) и $\vec{B} = 0$, за густину енергије поља (хамилтонијан) добијамо[15]:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} \equiv T^{0}{}_{0} &= \frac{1}{4\pi}\frac{F^{0i}F_{i0}}{\sqrt{1-b^{-2}\vec{E}^2}} - \frac{b^2}{4\pi}\left(1 - \sqrt{1-b^{-2}\vec{E}^2}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{E}^2}{\sqrt{1-b^{-2}\vec{E}^2}} - \frac{b^2}{4\pi} + \frac{b^2}{4\pi}\frac{1-b^{-2}\vec{E}^2}{\sqrt{1-b^{-2}\vec{E}^2}} \\ &= \frac{b^2}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{1-b^{-2}\vec{E}^2}} - 1\right)\end{aligned}$$

[15] Уочити аналогију са кинетичком енергијом слободне релативистичке честице:

$$T = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-c^{-2}\vec{v}^2}} - 1\right).$$

Такође, потпуна аналогија вреди и у случају Maxwellове електростатике и нерелативистичке механике:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi}\vec{E}^2 \qquad \text{наспрам} \qquad T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2.$$

Заменом (2.37) следи

$$\mathcal{H}=\frac{b^2}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{1-b^{-2}\dfrac{e^2}{r_0^4+r^4}}}-1\right)=\frac{b^2}{4\pi}\left(\frac{\sqrt{r_0^4+r^4}}{\sqrt{r_0^4+r^4-\dfrac{e^2}{b^2}}}-1\right)=\frac{b^2}{4\pi}\frac{\sqrt{r_0^4+r^4}-r^2}{r^2}, \tag{2.39}$$

па се интеграцијом по целом простору може добити укупна електростатичка енергија сингуларитета:

$$\begin{aligned}
E &= \int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{H}\,d^3\vec{r}=\int_0^\infty dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\; r^2\sin\theta\,\frac{b^2}{4\pi}\frac{\sqrt{r_0^4+r^4}-r^2}{r^2}\\
&= \frac{b^2}{4\pi}\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\infty dr\left(\sqrt{r_0^4+r^4}-r^2\right)=\frac{b^2}{4\pi}4\pi r_0^3\int_0^\infty\left(\sqrt{1+\frac{r^4}{r_0^4}}-\frac{r^2}{r_0^2}\right)d\left(\frac{r}{r_0}\right)\\
&= b^2\frac{r_0^4}{r_0}\int_0^\infty\left(\sqrt{1+x^4}-x^2\right)dx=\frac{e^2}{r_0}\int_0^\infty\left(\sqrt{1+x^4}-x^2\right)dx
\end{aligned}$$

Када се изврши преостала интеграција[16], тражена укупна енергија сингуларитета је:

$$E=\frac{e^2}{r_0}\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{3\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}\equiv e^2\sqrt{\frac{b}{e}}\,\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{3\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}\simeq e^2\sqrt{\frac{b}{e}}\cdot 1.236. \tag{2.40}$$

Коначно, када се експлицитно замени $e=\frac{1}{\sqrt{137}}$, добије се приближно:

$$E\simeq 0.031\sqrt{b}.$$

Дакле, видимо да је укупна електромагнетна енергија сингуларитета коначна, и да је пропорционална корену из b. Ово је у време када су Born и Infeld развијали ову теорију био главни и основни резултат, несумњиво супериоран у односу на Maxwellову теорију.

Даље развијање идеје електрона као сингуларитета нас води до дискусије његове масе. Наиме, из теорије релативности знамо да је *укупна* енергија неког објекта (у референтном систему мировања) једнака његовој маси. Пошто електрон има ненулту и коначну електромагнетну енергију мировања, можемо писати:

$$m_e=E+m^*,$$

где је E малопре израчуната електромагнетна енергија, а m^* маса неелектромагнетног порекла, која може и не мора постојати. Одавде се као директна последица добија:

$$E\leqslant m_e=9.1\cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}=2.6\cdot 10^{12}\frac{1}{\mathrm{m}},$$

па решавањем по b добијамо:

$$b\leqslant e\left(\frac{m_e}{e^2}\right)^2\frac{9\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^4}{\pi^3}=7.1\cdot 10^{27}\frac{1}{\mathrm{m}^2}=4\cdot 10^{11}\ \mathrm{T}, \tag{2.41}$$

што је за земаљске услове веома велика вредност јачине поља. Имамо, дакле, горњу границу за вредност константе b, па ако даље претпоставимо да електрон нема никакву масу неелектромагнетног

[16] Интеграл се решава сменом $\sqrt{1+x^4}-x^2=\sqrt{t}$, чиме се своди на пар Eulerових B функција. Користећи идентитете

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},\qquad \Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi},\qquad \Gamma(a+1)=a\Gamma(a),$$

добија се горњи резултат.

порекла ($m^* = 0$), у горњој неједначини ће важити знак једнакости, чиме смо фиксирали константу b.

Размотримо сада две важне последице. Прво, видимо да b има веома велику вредност, што у потпуности оправдава чињеницу да досад није експериментално запажено никакво одступање од лимеса слабих поља, тј. Maxwellове електродинамике. Као и у теорији релативности, сви ефекти који потичу од нелинеарности су веома далеко од свакодневних искустава. Друго, природна дужина за сингуларитет има вредност:

$$r_0 = \sqrt{\frac{e}{b}} = 3.5 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m},$$

што је заиста веома мало, и задире далеко у домет квантне теорије, тј. излази из оквира важења класичне теорије коју разматрамо.

Наравно, процена константе b помоћу захтева $m^* = 0$ уопште не мора да важи. Може се чак рећи да се неелектромагнетна маса не може уопште избацити из теорије ако она претендује да буде фундаментална (бар на класичном нивоу). Наиме, испоставља се да се неелектромагнетна маса не може елиминисати из теорије зато што постоје фамилије елементарних честица. Конкретно, μ и τ имају потпуно идентичне електромагнетне особине као електрон, али много (бар два реда величине) већу масу. Ово има за последицу несумњиво постојање неелектромагнетне масе, јер све три честице имају исту укупну електромагнетну енергију. Сада, пошто μ и τ имају осим електромагнетне и неелектромагнетну масу, а приори нема разлога да је електрон нема, те се може сасвим природно претпоставити да је $m^* \neq 0$. Да бисмо проценили колика је та маса (и на основу тога израчунали нову, мању вредност за b), треба нам поново структурна теорија која ће тој маси дати неко порекло. Тиме се враћамо на проблем структуре електрона, који смо целом овом теоријом управо покушавали да заобиђемо.

Постоје начини да се теорија модификује тако да инкорпорира и фамилије елементарних честица без увођења неелектромагнетне масе, али по цену (на пример) увођења више различитих константи b, по једне за сваку фамилију. Но, тиме се теорија значајно компликује и постаје сувише вештачка.

Тиме смо завршили преглед основних особина Born-Infeldове електродинамике. Напоменимо на крају да је у теорији суперструна, где се Born-Infeldов лагранжијан природно појављује, константа b исто тако природно фиксирана неким другим величинама које у тој теорији фигуришу. Но, у оквиру те теорије јачина поља $F_{\mu\nu}$ има више степени слободе него просто електромагнетно поље, те му се не може на очигледан начин приписати физички смисао. Због тога се засад само изучава математичка структура теорије, која тек треба да добије интерпретацију. У том смислу је веома занимљива и важна особина Born-Infeldове теорије њена дуална симетрија, коју ћемо изучити у наредној глави.

Глава 3

СИМЕТРИЈА ДУАЛНОСТИ

У теорији суперструна постоји много симетрија, и неке од њих носе име *дуалне симетрије*. То је опште име за разне врсте симетрија које се јављају у разним "деловима" теорије. Нас у овом раду занима тзв. *електромагнетна* дуална симетрија, тј. дуална симетрија електромагнетних појава.

Један практичан разлог због кога су дуалне симетрије занимљиве, је могућност да се непертурбативни проблем (који не умемо да решимо) неком трансформацијом "пресели" у пертурбативни сектор, реши, па се решење затим инверзном трансформацијом "врати" у непертурбативни сектор. Ако је примењена трансформација симетрија теорије, добијено решење ће бити решење полазног непертурбативног проблема.

Сем тога, свака (па и дуална) симетрија има теоријски значај (на пример због закона одржања).

3.1 Дефиниција трансформације

Дуална симетрија се види чак и на нивоу безизворне[1] Maxwellове електродинамике, под именом "Hodge ротација[2]". Међутим, као што ћемо видети, преласком са Maxwellове на (било коју) нелинеарну теорију, ова симетрија се експлицитно нарушава, тј. Hodge ротације више не чувају једначине динамике. Зато се ове трансформације уопштавају на такав начин да чувају једначине динамике нелинеарних теорија, чиме се долази до појма *дуалних трансформација*, које садрже Hodge ротације као специјалан случај. У овом одељку ћемо ово детаљно размотрити.

Докажимо најпре пар корисних идентитета везаних за оператор дуалности, $\star$. Нека је $A_{\mu\nu}$ произвољан тензор другог реда. Тада је оператор дуалности дефинисан[3] једначином:

$$\star A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A^{\rho\sigma}.$$

Имајући у виду идентитете (4), следи:

[1] Шта се дешава са Maxwellовом теоријом која садржи изворе размотрићемо у одељку 3.3.

[2] Овај термин је релативно нов и није се још усталио у литератури. Кажемо да је у питању ротација зато што трансформација има групну структуру ротације у равни, $SO(2)$, а Hodge зато што у трансформацији природно фигурише Hodge star оператор, $\star$.

[3] Оператор дуалности се може дефинисати тако да делује и на тензоре нултог, првог, трећег и четвртог реда, али нама то овде неће бити потребно.

$$\begin{aligned}
\star\star A_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_{\rho\sigma} \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\right)A_{\rho\sigma} \\
&= -\frac{1}{2}\delta^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta}A_{\rho\sigma} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\delta^{\rho}{}_{\alpha}\delta^{\sigma}{}_{\beta} - \delta^{\rho}{}_{\beta}\delta^{\sigma}{}_{\alpha}\right)A_{\rho\sigma} \\
&= -\frac{1}{2}\left(A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Уколико је тензор $A_{\mu\nu}$ антисиметричан, $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$, имамо $\star\star A_{\mu\nu} = -A_{\mu\nu}$, одакле (пошто је $A_{\mu\nu}$ произвољан) следи идентитет[4]:

$$\star\star = -1. \tag{3.1}$$

Запазити да уколико тензор на који $\star\star$ делује није антисиметричан, имамо $\star\star \neq -1$!

Затим, нека су $A_{\mu\nu}$ и $B_{\mu\nu}$ произвољни тензори. Имамо:

$$\star A_{\mu\nu}B^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A^{\rho\sigma}B^{\mu\nu} = A^{\rho\sigma}\frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu}B^{\mu\nu} = A^{\rho\sigma}\star B_{\rho\sigma} = A_{\mu\nu}\star B^{\mu\nu}.$$

Видимо да смемо произвољно премештати $\star$ са једног тензора на други у оквиру контракције. Под претпоставком да је $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$, добијамо следећи идентитет:

$$\star A_{\mu\nu}\star B^{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\star\star B^{\mu\nu} \overset{(3.1)}{=} -A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}. \tag{3.2}$$

Сада дефинишимо [5] Hodge трансформацију на следећи начин:

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} \overset{\text{деф}}{=} \cos\alpha\, F_{\mu\nu} + \sin\alpha\, \star F_{\mu\nu}, \qquad \alpha \in [0, 2\pi). \tag{3.3}$$

У координатном систему у коме је $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ можемо увести тровекторску нотацију, па ове једначине (на основу (5), (2) и (3)) добијају облик:

$$\begin{array}{ccccccc}
\vec{E} & \to & \vec{E}' & = & \cos\alpha\,\vec{E} & + & \sin\alpha\,\vec{B}, \\
\vec{B} & \to & \vec{B}' & = & -\sin\alpha\,\vec{E} & + & \cos\alpha\,\vec{B}.
\end{array}$$

Овај облик једначина оправдава назив "ротација", а параметар α представља угао ротације. Пошто је једначина (3.3) коваријантна, Hodge ротације комутирају са општим трансформацијама координата.

Докажимо да трансформације (3.3) чине групу. Најпре покажимо затвореност:

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} \to F''_{\mu\nu} &= \cos\beta\, F'_{\mu\nu} + \sin\beta\,\star F'_{\mu\nu} \\
&= \cos\beta\left(\cos\alpha\, F_{\mu\nu} + \sin\alpha\,\star F_{\mu\nu}\right) + \sin\beta\left(\cos\alpha\,\star F_{\mu\nu} + \sin\alpha\,\star\star F_{\mu\nu}\right) \\
&= \left(\cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta\right)F_{\mu\nu} + \left(\sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta\right)\star F_{\mu\nu} \\
&= \cos(\alpha+\beta)F_{\mu\nu} + \sin(\alpha+\beta)\star F_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Дакле, композиција две Hodge ротације је Hodge ротација. Затим, композиција је у општем случају асоцијативна, неутрални елемент се добија за $\alpha = 0$, инверзни за α је $-\alpha$, а из закона компоновања видимо да је група и комутативна. Све ово су очекивани закључци, јер се заправо ради о репрезентацији Abelове групе $SO(2)$.

Следеће што треба проверити је инваријантност безизворних Maxwellових једначина динамике на ове трансформације. Најпре, напоменимо да су за доказ инваријантности неопходни и Bianchijеви

[4] Ово није идентитет у правом смислу те речи, јер важи само за антисиметричне тензоре. Но, у овом раду ће се јављати само такви случајеви, па је зато корисно истаћи једначину (3.1).

идентитети, јер без њих систем једначина није потпун. Имамо:

$$\begin{array}{rcl} \partial^\mu(\sqrt{-g}\,F'_{\nu\mu}) & = & 0 \\ \partial^\mu(\sqrt{-g}\,\star F'_{\nu\mu}) & = & 0 \end{array} \quad \overset{(3.3)}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{rcl} \partial^\mu\sqrt{-g}\,(\cos\alpha\,F_{\mu\nu} + \sin\alpha\star F_{\mu\nu}) & = & 0 \\ \partial^\mu\sqrt{-g}\,(\cos\alpha\,\star F_{\mu\nu} + \sin\alpha\star\star F_{\mu\nu}) & = & 0 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} \cos\alpha\,\partial^\mu(\sqrt{-g}\,F_{\mu\nu}) + \sin\alpha\,\partial^\mu(\sqrt{-g}\,\star F_{\mu\nu}) & = & 0 \\ -\sin\alpha\,\partial^\mu(\sqrt{-g}\,F_{\mu\nu}) + \cos\alpha\,\partial^\mu(\sqrt{-g}\,\star F_{\mu\nu}) & = & 0 \end{array}. \tag{3.4}$$

Овде је претпостављено да α није функција x^μ, тј. да се ради о *глобалној* трансформацији. Детерминанта горњег хомогеног система једначина је:

$$\forall\alpha\in[\,0,2\pi) \quad \Delta = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0,$$

па постоји само тривијално решење:

$$\partial^\mu(\sqrt{-g}\,F_{\nu\mu}) = 0, \qquad \partial^\mu(\sqrt{-g}\,\star F_{\nu\mu}) = 0,$$

чиме смо доказали инваријантност једначина динамике у односу на ове трансформације.

Размотримо сада општи случај лагранжијана $\mathcal{L}$, који генерише нелинеарну теорију. Под претпоставком да лагранжијан не зависи од поља A_μ већ само од извода $\partial_\mu A_\nu$ и то у антисиметричним комбинацијама[5], једначине динамике поља имају општи облик као (2.5):

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 0,$$

односно, ако уведемо *тензор индукције* као:

$$H^{\nu\mu} \overset{\text{деф}}{=} \frac{4\pi}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \tag{3.5}$$

(упореди са једначинама (2.6) и (2.11)), имамо (упореди (2.12)):

$$\partial^\mu(\sqrt{-g}\,H_{\nu\mu}) = 0. \tag{3.6}$$

Ове једначине динамике имају формално исти облик као Maxwellове, а нелинеарност теорије је сакривена у конститутивним једначинама (3.5).

Јасно, једним погледом на (3.4) видимо да доказ инваријантности једначина динамике више не важи, па закључујемо да Hodge ротације нису симетрија нелинеарних теорија. Сем тога, из (3.4) се види како треба модификовати Hodge трансформацију тако да обухвати и нелинеаран случај. Зато дефинишемо *нове* трансформације:

$$\begin{array}{rcccccc} F_{\mu\nu} & \to & F'_{\mu\nu} & \overset{\text{деф}}{=} & \cos\alpha\,F_{\mu\nu} & + & \sin\alpha\star H_{\mu\nu} \\ H_{\mu\nu} & \to & H'_{\mu\nu} & \overset{\text{деф}}{=} & \cos\alpha\,H_{\mu\nu} & + & \sin\alpha\star F_{\mu\nu} \end{array}, \qquad \alpha\in[\,0,2\pi). \tag{3.7}$$

Ове трансформације се зову *дуалне трансформације*.

Као и прошли пут, у координатном систему у коме је $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ можемо увести тровекторску нотацију, па ове једначине сада добијају облик:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \vec{E} & \to & \vec{E}' & = & \cos\alpha\,\vec{E} & + & \sin\alpha\,\vec{H} \\ \vec{H} & \to & \vec{H}' & = & -\sin\alpha\,\vec{E} & + & \cos\alpha\,\vec{H} \end{array}, \qquad \begin{array}{rcrcrcr} \vec{B} & \to & \vec{B}' & = & \cos\alpha\,\vec{B} & - & \sin\alpha\,\vec{D} \\ \vec{D} & \to & \vec{D}' & = & \sin\alpha\,\vec{B} & + & \cos\alpha\,\vec{D} \end{array}.$$

Потпуно аналогним поступком као код Hodge ротација показује се да дуалне трансформације чине групу, као и да остављају инваријантним једначине динамике (3.6) у комбинацији са Bianchijевим

[5] Другим речима, претпостављамо да лагранжијан зависи само од тензора јачине поља $F_{\mu\nu}$.

идентитетима. Сем тога, видимо да се дуалне трансформације своде на Hodge трансформације у случају $H_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$, тј. у случају линеарне (односно Maxwellове) теорије.

Но, оно што је ново код дуалних трансформација је да не представљају симетрију *свих* нелинеарних теорија. Наиме, да би дуалне трансформације биле симетрија теорије, морају остављати инваријантном дефиницију тензора индукције, тј. конститутивну једначину (3.5). Овај захтев намеће ограничење на облик лагранжијана теорије.

Да бисмо проверили да ли нека нелинеарна теорија има дуалну симетрију, потребно је и довољно да утврдимо да једначина (3.5) не мења облик када се примени трансформација (3.7), што се може увек учинити када нам је задат лагранжијан теорије. Но, саму једначину можемо у извесној мери поједноставити и тиме наћи математички погоднији критеријум инваријантности.

То се чини на следећи начин. Најпре, како дуалне трансформације имају групну структуру ротација у равни, $SO(2)$, имамо посла са једнопараметарском Liejевом групом, па је довољно испитати инваријантност на трансформације које су инфинитезимално удаљене од неутралног елемента, $\alpha = 0$. Дакле, инфинитезималне трансформације у лимесу[6] $\alpha \to 0$ добијају облик:

$$\begin{array}{ccccccc} F_{\mu\nu} & \to & F'_{\mu\nu} & = & F_{\mu\nu} & + & \alpha \star H_{\mu\nu} \\ H_{\mu\nu} & \to & H'_{\mu\nu} & = & H_{\mu\nu} & + & \alpha \star F_{\mu\nu} \end{array},$$

одакле добијамо изразе за варијације:

$$\delta F_{\mu\nu} = \alpha \star H_{\mu\nu}, \qquad \delta H_{\mu\nu} = \alpha \star F_{\mu\nu}.$$

Даље, варирањем једначине (3.5) имамо:

$$\begin{array}{rcrcl} H^{\mu\nu} = -2\dfrac{4\pi}{\sqrt{-g}}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} & \Longrightarrow & \delta H^{\mu\nu} & = & -2\dfrac{4\pi}{\sqrt{-g}}\dfrac{\partial}{\partial F_{\alpha\beta}}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}\delta F_{\alpha\beta} \\ & \Longleftrightarrow & \alpha \star F^{\mu\nu} & = & -2\dfrac{4\pi}{\sqrt{-g}}\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}\partial F_{\mu\nu}}\alpha \star H_{\alpha\beta} \\ & \Longleftrightarrow & \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} & = & \left(-2\dfrac{4\pi}{\sqrt{-g}}\right)^2 \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}\partial F_{\alpha\beta}}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\rho\sigma}} \\ & \Longleftrightarrow & \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} & = & \dfrac{1}{2}\left(-2\dfrac{4\pi}{\sqrt{-g}}\right)^2 \dfrac{\partial}{\partial F_{\mu\nu}}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\rho\sigma}}\right). \end{array}$$

Последња једначина дозвољава интеграцију:

$$\int \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\partial F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-2\frac{4\pi}{\sqrt{-g}}\right)^2 \int \partial\left(\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\rho\sigma}}\right).$$

Размотримо најпре интеграл на левој страни. Због антисиметричности симбола Levi-Civita, индекси ρ и σ су сигурно различити од μ и ν, па имамо:

$$\int \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\partial F_{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\int \partial F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\star F^{\mu\nu}$$

(фактор $1/2$ у трећем кораку се убацује због дуплог пребројавања у контракцијама, јер је Levi-Civita тензор симетричан у односу на замену парова индекса, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu}$).

[6] Овде користимо познате апроксимативне формуле:

$$\sin\alpha \simeq \alpha, \qquad \cos\alpha \simeq 1, \qquad (\alpha \to 0)$$

које се добијају развојем функција у Taylorов ред.

На десној страни под интегралом се налази скалар, па имамо:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(-2\frac{4\pi}{\sqrt{-g}}\right)^2 \int \partial\left(\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\rho\sigma}}\right) &= \frac{1}{2}\left(-2\frac{4\pi}{\sqrt{-g}}\right)^2 \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\rho\sigma}} + C \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}H^{\alpha\beta}H^{\rho\sigma} + C \\
&= H_{\alpha\beta}\star H^{\alpha\beta} + C
\end{aligned}$$

Изједначавањем следи:

$$F_{\mu\nu}\star F^{\mu\nu} = H_{\alpha\beta}\star H^{\alpha\beta} + C.$$

Константу интеграције C налазимо из услова да Maxwellов лагранжијан задовољава ову једначину, па пошто је у том случају $H_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$, имамо $C = 0$.

Дакле, потребан и довољан услов да теорија има дуалну симетрију је:

$$F_{\mu\nu}\star F^{\mu\nu} = H_{\mu\nu}\star H^{\mu\nu}. \tag{3.8}$$

У тровекторској нотацији (у координатном систему где је $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$) ова једначина има облик:

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = \vec{D}\cdot\vec{H}.$$

Сада (види једначину (2.16) и фусноту 5 на страни 8) видимо да Born-Infeldова електродинамика поседује дуалну симетрију.

3.2 Опште решење за самодуални лагранжијан

Пошто смо утврдили да Born-Infeldова теорија има дуалну симетрију и пошто смо одредили ефективан критеријум инваријантности дате теорије на дуалне трансформације, поставља се природно питање да ли је Born-Infeldова теорија једина нелинеарна теорија која је симетрична на ове транформације. Одговор на ово питање је одречан [5, 6], и то ћемо показати у овом одељку.

Имајући на уму критеријум дуалне симетричности (3.8), најприроднија идеја је да се решавањем ове једначине израчунају сви лагранжијани који је задовољавају. У том циљу запишимо је најпре у облику:

$$F_{\mu\nu}\star F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left(-2\frac{4\pi}{\sqrt{-g}}\right)^2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\rho\sigma}}. \tag{3.9}$$

Приметимо пре свега да је са леве стране инваријанта, $-4I_2$ (види другу једначину у (2.2)). Затим, сетимо се да се на основу теореме из додатка А непознати лагранжијан $\mathcal{L}$ може записати као функција две инваријанте из (2.2), $\mathcal{L} = \mathcal{L}(I_1, I_2)$. Имајући ово на уму, парцијалне изводе на десној страни (3.9) рачунамо на следећи начин:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} = \frac{\partial I_1}{\partial F_{\mu\nu}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial I_1} + \frac{\partial I_2}{\partial F_{\mu\nu}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial I_2}.$$

Знајући да је:

$$\frac{\partial I_1}{\partial F_{\mu\nu}} = F^{\mu\nu}, \qquad \frac{\partial I_2}{\partial F_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\star F^{\mu\nu},$$

и уводећи краћу нотацију:

$$\mathcal{L}_1 \overset{\text{деф}}{=} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial I_1}, \qquad \mathcal{L}_2 \overset{\text{деф}}{=} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial I_2},$$

добијамо:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} = F^{\mu\nu}\mathcal{L}_1 - \frac{1}{2}\star F^{\mu\nu}\mathcal{L}_2.$$

Заменом свега овога у (3.9) следи:

$$\begin{aligned}
-4I_2 &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left(-2\frac{4\pi}{\sqrt{-g}}\right)^2\left(F^{\mu\nu}\mathcal{L}_1-\frac{1}{2}\star F^{\mu\nu}\mathcal{L}_2\right)\left(F^{\rho\sigma}\mathcal{L}_1-\frac{1}{2}\star F^{\rho\sigma}\mathcal{L}_2\right)\\
&= \left(-2\frac{4\pi}{\sqrt{-g}}\right)^2\left[\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}\mathcal{L}_1^2+\frac{1}{8}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\star F^{\mu\nu}\star F^{\rho\sigma}\mathcal{L}_2^2\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}\star F^{\rho\sigma}+\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\star F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}\right)\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\right]\\
&= \left(-2\frac{4\pi}{\sqrt{-g}}\right)^2\left[F^{\mu\nu}\star F_{\mu\nu}\mathcal{L}_1^2+\frac{1}{4}\star F^{\mu\nu}\star\star F_{\mu\nu}\mathcal{L}_2^2-\frac{1}{2}\left(F^{\mu\nu}\star\star F_{\mu\nu}+\star F^{\mu\nu}\star F_{\mu\nu}\right)\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\right]\\
&= \left(-2\frac{4\pi}{\sqrt{-g}}\right)^2\left[F_{\mu\nu}\star F^{\mu\nu}\left(\mathcal{L}_1^2-\frac{1}{4}\mathcal{L}_2^2\right)+F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\right]\\
&= \left(-2\frac{4\pi}{\sqrt{-g}}\right)^2\left[-4I_2\left(\mathcal{L}_1^2-\frac{1}{4}\mathcal{L}_2^2\right)+2I_1\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\right],
\end{aligned}$$

одакле добијамо:

$$2I_1\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2+I_2\left[\left(\frac{\sqrt{-g}}{4\pi}\right)^2-4\mathcal{L}_1^2+\mathcal{L}_2^2\right]=0. \tag{3.10}$$

Следећи корак [5, 6] је увођење смене. Нове независно-промењиве уводимо једначинама[7]:

$$p=\frac{\sqrt{-g}}{4\pi}\frac{1}{4}\left(I_1+\sqrt{I_1^2+4I_2^2}\right),\qquad q=\frac{\sqrt{-g}}{4\pi}\frac{1}{4}\left(I_1-\sqrt{I_1^2+4I_2^2}\right), \tag{3.11}$$

и после урштавања у горњу једначину и мало дужег рачунања она се своди на:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}=1. \tag{3.12}$$

Једначина (3.12) је веома много изучавана у математици [6] и познато је њено опште решење:

$$\mathcal{L} = \frac{2p}{f'(s)}+f(s), \tag{3.13}$$

$$q = \frac{p}{\left[f'(s)\right]^2}+s. \tag{3.14}$$

Овде је $f(s)$ произвољна функција промењиве s, и одабирањем њеног експлицитног облика добија се једно партикуларно решење једначине (3.12) на следећи начин: најпре се из $f(s)$ одреди $f'(s)$, па се замени у (3.14) и реши по $s(p,q)$. Затим се то уврсти у (3.13) чиме се елиминише зависност од s и добије партикуларни интеграл $\mathcal{L}(p,q)$. Коначно, једначинама (3.11) се елиминишу p и q у корист инваријанти поља I_1 и I_2.

Пошто је једначина (3.9) (односно (3.12)) потребан и довољан услов да теорија буде симетрична на дуалне транформације, овако добијени лагранжијан сигурно представља такву теорију, и обратно, ако теорија има дуалну симетрију, онда њен лагранжијан задовољава (3.12) што значи да постоји функција $f(s)$ која га генерише.

[7]Ови изрази се добијају као два решења квадратне једначине:

$$x^2-\left(\frac{\sqrt{-g}}{4\pi}\frac{I_1}{2}\right)x-\left(\frac{\sqrt{-g}}{4\pi}\frac{I_2}{2}\right)^2=0.$$

На пример, ако изаберемо функцију $f(s) = -s$, имамо $f'(s) = -1$, па заменом у (3.14) добијамо $s(p, q) = q - p$. Уврштавањем у (3.13) и елиминацијом s имамо:

$$\mathcal{L} = -p - q.$$

Елиминацијом p и q помоћу смене (3.11) добијамо:

$$\mathcal{L} = -\frac{\sqrt{-g}}{4\pi}\frac{1}{2}I_1 = -\sqrt{-g}\,\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

што је заправо лагранжијан Maxwellове електродинамике. Пошто од сваког лагранжијана очекујемо да се у лимесу слабих поља своди на Maxwellов, физички је оправдано наметнути гранични услов:

$$\mathcal{L} = -p - q + o(p, q), \qquad (p, q \to 0). \tag{3.15}$$

Као други пример, изаберимо функцију:

$$f(s) = \frac{\sqrt{-g}}{4\pi}b^2\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\pi}{\sqrt{-g}}\frac{2}{b^2}s}\right).$$

Одатле имамо:

$$f'(s) = -\left(1 + \frac{4\pi}{\sqrt{-g}}\frac{2}{b^2}s\right)^{-\frac{1}{2}},$$

па се заменом у (3.14) и решавањем по s добија:

$$s = \frac{q - p}{1 + \frac{4\pi}{\sqrt{-g}}\frac{2}{b^2}p}.$$

Уврштавањем ових једначина у (3.13), после мало сређивања добијамо:

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}}{4\pi}b^2\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\pi}{\sqrt{-g}}\frac{2}{b^2}p}\,\sqrt{1 + \frac{4\pi}{\sqrt{-g}}\frac{2}{b^2}q}\right), \tag{3.16}$$

одакле елиминацијом p и q помоћу (3.11) коначно добијамо:

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}}{4\pi}b^2\left(1 - \sqrt{1 + \frac{I_1}{b^2} - \frac{I_2^2}{b^4}}\right),$$

што заправо представља лагранжијан Born-Infeldове електродинамике. Приметимо да у лимесу $p, q \to 0$ (3.16) постаје:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{\sqrt{-g}}{4\pi}b^2\left[1 - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{4\pi}{\sqrt{-g}}\frac{2}{b^2}p + o(p)\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{4\pi}{\sqrt{-g}}\frac{2}{b^2}q + o(q)\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{4\pi}b^2\left[1 - \left(1 + \frac{4\pi}{\sqrt{-g}}\frac{p+q}{b^2} + o(p, q)\right)\right] \\
&= -p - q + o(p, q),
\end{aligned}$$

у складу са граничним условом (3.15).

На основу свега изложеног, можемо да закључимо да Born-Infeldова електродинамика није једина нелинеарна теорија са дуалном симетријом, већ је само једно од решења једначине (3.9).

Прокоментаришимо мало структуру једначина (3.13) и (3.14). Најпре, извод произвољне функције $f(s)$ фигурише нелинеарно, па се (3.14) може експлицитно аналитички решити по $s(p,q)$ само за неке (погодне) изборе $f(s)$. Затим, није јасно који (потребан и довољан) услов $f(s)$ треба да задовољи да би резултујући лагранжијан имао коректан лимес (3.15). Овакве околности много отежавају експлицитно рачунање нових решења, и она се добијају углавном само за срећно "погођене" функције $f(s)$. Чак и тада, добијени лагранжијан је обично веома компликован, што аутоматски умањује његову практичну корист. Наиме, компликовани лагранжијани по правилу генеришу једначине динамике које су бар исто толико компликоване, што укомбиновано са њиховом нелиеарношћу чини било какво израчунавање математички енормно тешким, ако не и немогућим.

На пример, избором функције:

$$f(s) = -\ln\left(s + \sqrt{1+s^2}\right)$$

диференцирањем добијамо:

$$f'(s) = -\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}.$$

Квадратни корен у имениоцу се згодно укомбинује са квадратом функције $f'(s)$ у једначини (3.14) што даје квадратну једначину по s која се може решити:

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4p(p-q)}}{2p}.$$

Бирањем "+" решења и заменом у (3.13) добија се лагранжијан[8]:

$$\mathcal{L} = -\sqrt{2 - 2\sqrt{1-4p(p-q)} + 4pq} - \ln\left(\frac{-1+\sqrt{1-4p(p-q)}}{2p} + \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-4p(p-q)}+2pq}{2p^2}}\right),$$

који после елиминације p и q једначинама (3.11) постаје безнадежно компликован. Но, са друге стране, уз мало рачунања може се показати да задовољава гранични услов (3.15), па представља (у принципу) могућ лагранжијан електродинамике. Пошто је добијен као егзактно решење једначине (3.12), инваријантан је на дуалне трансформације.

Бирањем "−" решења може се после мало рачунања показати да тако добијени лагранжијан не задовољава гранични услов (3.15) па то решење одбацујемо.

Још један пример се добија избором функције:

$$f(s) = -\arcsin(s),$$

одакле имамо:

$$f'(s) = -\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}.$$

Слично као и малопре, квадратни корен нам помаже да решимо (3.14) по s:

$$s = \frac{1 \pm \sqrt{1+4p(p-q)}}{2p}.$$

Бирањем "−" решења и заменом у (3.13) добијамо лагранжијан:

$$\mathcal{L} = -\sqrt{-2 + 2\sqrt{1+4p(p-q)} + 4pq} - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{1+4p(p-q)}}{2p}\right).$$

[8]Приметити да са овако одабраном функцијом f лагранжијан није димензионо усаглашен, као и то да недостаје фактор $\frac{\sqrt{-g}}{4\pi}$ који обезбеђује коваријантност. Но, приметити и то да се погодним редефинисањем величина p и q као и малим "штимовањем" функције $f(s)$ оба недостатка могу лако уклонити. Овде то није урађено само да би се имао бољи увид у облик лагранжијана, који је и без допунских константи прекомпликован.

Овај лагранжијан такође има добар Maxwellов лимес, представља егзактно решење једначине (3.12) па је инваријантан на дуалне трансформације, и поново је веома компликован.

За ово решење ваља напоменути да, осим што "+" решење не обезбеђује добар лимес слабих поља, arcsin у функцији $f(s)$ намеће ограничење $|s| \leqslant 1$, што се у крајњој линији одражава на дозвољене вредности I_1 и I_2.

Осим егзактних решења, погодним изборима функције $f(s)$ могу се добити и нека приближна решења. На пример, избором:

$$f(s) = -s + As^2,$$

уз услов да је константа A "мала" (тј. уз услов $A \to 0$), једначина (3.14) се може линеаризовати по A и тиме добити:

$$s = (q-p)(1-4pA), \qquad (A \to 0),$$

одакле се заменом у (3.13) и поновном линеаризацијом стиже до лагранжијана:

$$\mathcal{L} = -p - q + (p-q)^2 A, \qquad (A \to 0).$$

Овај лагранжијан очигледно има добар Maxwellов лимес, а сем тога задовољава једначину (3.12) до на $o(A)$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = [-1+2(p-q)A]\,[-1-2(p-q)A] = 1 - [2(p-q)A]^2 = 1 + o(A), \qquad (A \to 0),$$

па је инваријантан на дуалне трансформације до тог реда. Малом анализом уведених претпоставки добијамо да је поступак израчунавања коректан докле год је задовољен услов:

$$(p-q)^2 A \ll -p-q,$$

што a posteriori представља ефективни критеријум "малости" константе A.

Уколико не наметнемо услов $A \to 0$, једначина (3.14) постаје кубна једначина по s:

$$4A^2 s^3 - 4A(1+qA)s^2 + (1+4qA)s + p - q = 0.$$

Ова једначина има једно реално и два коњуговано–комплексна решења. Пошто у том случају (3.13) постаје:

$$\mathcal{L} = \frac{2p}{2As-1} + As^2 - s,$$

видимо да избором комплексних решења добијамо комплексан лагранжијан, па та решења одбацујемо. Преостаје реално решење које има облик:

$$\begin{aligned} s \;=\; & \tfrac{1+Aq}{3A} + \tfrac{\sqrt[3]{-A^3-12A^5q^2+8A^6q^3+A^4(-27p+6q)+3\sqrt{3}\sqrt{A^7p(2+27Ap-12Aq+24A^2q^2-16A^3q^3)}}}{6A^2} + \\ & + \tfrac{(1-2Aq)^2}{6\sqrt[3]{-A^3-12A^5q^2+8A^6q^3+A^4(-27p+6q)+3\sqrt{3}\sqrt{A^7p(2+27Ap-12Aq+24A^2q^2-16A^3q^3)}}}. \end{aligned}$$

Јасно, нема никакве поенте замењивати ово у горњу једначину за лагранжијан.

На крају ове анализе напоменимо још само да одсуство birefringence ефекта у теорији није повезано са дуалном симетријом.

Наиме, једина два лагранжијана који задовољавају једначине (2.29) су Born-Infeldов лагранжијан (који има дуалну симетрију) и лагранжијан облика:

$$\mathcal{L} = \frac{I_1}{I_2}$$

(види једначину (2.30)). Но, директном заменом у (3.10) видимо да овај лагранжијан не задовољава критеријум дуалне инваријантности, што значи да одсуство birefringence ефекта не имплицира дуалну симетрију теорије. Овакав однос дуалне инваријантности и birefringence ефекта се могао и очекивати, имајући у виду да је веома мало вероватно да сва решења једначина (2.29) задовољавају једначине (3.10).

Обрнуто, тривијално је видети да лагранжијани са дуалном симетријом не показују одсуство birefringence ефекта (изузев Born-Infeldовог лагранжијана) јер су (2.30) сва [2] решења тог типа, па закључујемо да дуална симетрија не имплицира одсуство birefringence ефекта.

Дакле, одсуство поменутог ефекта и дуална симетрија су независне особине лагранжијана, и Born-Infeldов лагранжијан је једини који поседује обе те особине.

3.3 Однос дуалности и магнетних монопола

У овом одељку ћемо видети у каквој је вези дуална симетрија са појавом магнетних монопола. Магнетни монополи, иако досад нису експериментално откривени, представљају теоријски веома интересантне објекте [7, 8], који у комбинацији са квантном механиком могу да дају одговор на нека досад нерешена теоријска питања, пре свега због чега је квантни број наелектрисања дискретан, тј. зашто су сва наелектрисања *целобројни* умножак елементарног наелектрисања, e.

У одељцима 3.1 и 3.2 разматрана је инваријантност Maxwellове електродинамике на дуалне (односно Hodge) трансформације. Но, проучаван је само случај *безизворних* Maxwellових једначина. Размотримо сада шта се догађа када имамо присутне изворе. Maxwellове једначине динамике заједно са Bianchiјевим идентитетима тада имају облик:

$$\partial_\mu \left(\sqrt{-g}\, F^{\alpha\mu} \right) = 4\pi\sqrt{-g}\, j^\alpha_{(\mathrm{e})}, \qquad \partial_\mu \left(\sqrt{-g}\, \star F^{\alpha\mu} \right) = 0. \tag{3.17}$$

Једним погледом на (3.4) видимо да доказ инваријантности на Hodge трансформације у овом случају не важи, јер добијени систем једначина није хомоген, па се Bianchiјеви идентитети више не пресликавају у саме себе. Закључујемо, дакле, да Maxwellове једначине са изворима *нису* инваријантне на Hodge (па самим тим ни на дуалне) трансформације.

Један од (теоријски привлачних) начина да се ова ситуација поправи је да се Bianchiјеви идентитети *модификују*[9] тако да гласе:

$$\partial_\mu \left(\sqrt{-g}\, \star F^{\alpha\mu} \right) = 4\pi\sqrt{-g}\, j^\alpha_{(\mathrm{m})}, \tag{3.18}$$

где новоуведени квадривектор $j^\alpha_{(\mathrm{m})}$ има смисао густине струје *извора магнетног поља*, у пуној аналогији са квадривектором густине струје извора електричног поља, $j^\alpha_{(\mathrm{e})}$. Ово се лепо види ако се цео систем Maxwellових једначина запише у тровекторском облику[10]:

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{div}\vec{E} &=& 4\pi\rho_{(\mathrm{e})} \\ \operatorname{rot}\vec{B} - \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} &=& 4\pi\vec{j}_{(\mathrm{e})} \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} \operatorname{div}\vec{B} &=& 4\pi\rho_{(\mathrm{m})} \\ -\operatorname{rot}\vec{E} - \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} &=& 4\pi\vec{j}_{(\mathrm{m})} \end{array}.$$

Извори магнетног поља су новост, јер (засад) експериментални подаци указују да је магнетно поље *безизворно*. Честице које би носиле магнетни набој, "намагнетисање", зову се *магнетни монополи*, и до данас представљају предмет експерименталне истраге, но засад без резултата[11].

Размотримо сада како треба квадривектори густине електричне и магнетне струје да се понашају при Hodge трансформацији (3.3) да би нове једначине динамике биле инваријантне, тј. да би Hodge

[9]Модификовање Bianchiјевих идентитета (на овај начин) је велики захват који драстично мења целу теорију. Пре свега, више не важи једначина $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ па није могуће на овај начин увести потенцијал електромагнетног поља. У том случају се тензор $F_{\mu\nu}$ обично узима за фундаменталну величину која описује поље, што има значајне последице на све остало. На пример, поступак квантизације електромагнетног поља се у стандардном облику ослања на чињеницу да се поље описује потенцијалом A_μ, па ако исти није формулисан у теорији, квантизација се мора вршити на фундаментално различит начин од стандардног.

[10]У координатном систему у коме је $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, јер је тровекторска нотација само у том систему ваљано дефинисана.

[11]То не значи да је експеримент у колизији са претпоставком о постојању монопола, већ само то да ниједан монопол досад *није детектован*.

трансформације биле симетрија теорије. Имитирајући поступак (3.4) имамо:

$$\begin{array}{rcl} \partial^\mu(\sqrt{-g}\,F'_{\nu\mu}) &=& 4\pi\sqrt{-g}\,j'_{\alpha(\mathrm{e})} \\ \partial^\mu(\sqrt{-g}\,\star F'_{\nu\mu}) &=& 4\pi\sqrt{-g}\,j'_{\alpha(\mathrm{m})} \end{array} \overset{(3.3)}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{rcl} \partial^\mu\sqrt{-g}\,(\cos\alpha\,F_{\mu\nu}+\sin\alpha\,\star F_{\mu\nu}) &=& 4\pi\sqrt{-g}\,j'_{\alpha(\mathrm{e})} \\ \partial^\mu\sqrt{-g}\,(\cos\alpha\,\star F_{\mu\nu}+\sin\alpha\,\star\star F_{\mu\nu}) &=& 4\pi\sqrt{-g}\,j'_{\alpha(\mathrm{m})} \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} \cos\alpha\,\partial^\mu(\sqrt{-g}\,F_{\mu\nu})+\sin\alpha\,\partial^\mu(\sqrt{-g}\,\star F_{\mu\nu}) &=& 4\pi\sqrt{-g}\,j'_{\alpha(\mathrm{e})} \\ -\sin\alpha\,\partial^\mu(\sqrt{-g}\,F_{\mu\nu})+\cos\alpha\,\partial^\mu(\sqrt{-g}\,\star F_{\mu\nu}) &=& 4\pi\sqrt{-g}\,j'_{\alpha(\mathrm{m})} \end{array}. \tag{3.19}$$

Детерминанта овог система једначина је поново увек различита од нуле, али је сада систем нехомоген, па има јединствено решење. Користећи прву једначину из (3.17) и (3.18) заменом у овај систем добијамо:

$$\begin{array}{rcrclcl} j_{\alpha(\mathrm{e})} &\to& j'_{\alpha(\mathrm{e})} &=& \cos\alpha\,j_{\alpha(\mathrm{e})} &+& \sin\alpha\,j_{\alpha(\mathrm{m})} \\ j_{\alpha(\mathrm{m})} &\to& j'_{\alpha(\mathrm{m})} &=& \cos\alpha\,j_{\alpha(\mathrm{m})} &-& \sin\alpha\,j_{\alpha(\mathrm{e})} \end{array}, \qquad \alpha\in[\,0,2\pi). \tag{3.20}$$

Ово су Hodge трансформације за електричне и магнетне изворе. Са овако дефинисаним трансформацијама, генералисана Maxwellова теорија има Hodge симетрију.

Оно што треба приметити у вези једначина (3.20) је да мешају електричне изворе са магнетним изворима, што значи да је свака наелектрисана честица истовремено и намагнетисана, јер су трансформације (3.20) симетрија теорије.

Размотримо сада магнетне монополе у Born-Infeldовој електродинамици, која ће да нам послужи као пример нелинеарне дуално симетричне теорије. Најпре, сетимо се да у овој теорији *немамо правих извора*, тј. све време радимо у *вакууму*, па је дуална симетрија у потпуности на снази. Затим, сетимо се да смо у одељку 2.2 размотрили начин на који се сингуларна решења једначина динамике могу интерпретирати као *честице*, тј. извори поља. За разлику од Maxwellове теорије, у којој смо морали да модификујемо једначине динамике како бисмо узели у обзир изворе, а затим морали да модификујемо и Bianchiјеве идентитете како бисмо сачували дуалну симетрију теорије, у Born-Infeldовом случају можемо да кажемо да безизворна теорија *генерише* наелектрисане честице (које су зато електромагнетног порекла, сингуларитети), при чему све време заправо радимо у вакууму, па се дуална симетрија не нарушава.

Имајући ово у виду, намеће се идеја да полазећи од сингуларитета електричног типа (наелектрисане честице), дуалном трансформацијом добијемо сингуларитет магнетног типа (намагнетисану честицу) који ће такође бити решење једначина динамике јер је дуална трансформација симетрија теорије. Притом је занимљиво да од чисто електростатичког сингуларитета добијемо чисто магнетостатички сингуларитет. Због тога бирамо дуалну трансформацију (3.7) са параметром $\alpha=-\frac{\pi}{2}$, што даје:

$$\vec{E}'=-\vec{H},\qquad \vec{H}'=\vec{E},\qquad \vec{B}'=\vec{D},\qquad \vec{D}'=-\vec{B}. \tag{3.21}$$

Сада преузмимо резултате одељка 2.2 који гласе (види једначине (2.34) и (2.35)):

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{A}{\sqrt{r^4+r_0^4}}\mathbf{e}_r,\qquad \vec{H}(\vec{r})=0,\qquad \vec{B}(\vec{r})=0,\qquad \vec{D}(\vec{r})=\frac{A}{r^2}\mathbf{e}_r,$$

при чему је $r_0=\sqrt{\dfrac{|A|}{b}}$. Увршртавањем овога у једначине (3.21) добијамо:

$$\vec{E}'(\vec{r})=0,\qquad \vec{H}'(\vec{r})=\frac{A}{\sqrt{r^4+r_0^4}}\mathbf{e}_r,\qquad \vec{B}'(\vec{r})=\frac{A}{r^2}\mathbf{e}_r,\qquad \vec{D}'(\vec{r})=0. \tag{3.22}$$

Пошто је трансформација (3.21) симетрија теорије, закључујемо да је (3.22) једно сингуларно решење Born-Infeldових једначина динамике, које не зависи од времена, има сферну симетрију, и чији интензитет поља $\vec{B}'$ на великим удаљеностима опада са квадратом растојања, тј. у складу је са Coulombовим граничним условом. Дакле, решење испуњава све услове да се сматра честицом[12],

[12] Односно, испуњава бар све услове које испуњава и електростатички сингуларитет из одељка 2.2, па је у једнакој мери оправдано називати га честицом.

и представља *магнетни монопол*. Дакле, ова честица је такође природно предвиђена Born-Infeldовом електродинамиком, и то зато што теорија има дуалну симетрију[13].

Подсетимо се још да је интеграциона константа A у одељку 2.2 имала смисао наелектрисања. Овде је ситуација потпуно аналогна, и смемо константу A да идентификујемо са *намагнетисањем*[14], g.

Израчунајмо још и укупну енергију овог монопола. Полазећи поново од (2.38), имамо:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} \equiv T^0{}_0 &= \frac{1}{4\pi}\frac{F^{0i}F_{i0}}{\sqrt{1+F}} - \delta^0{}_0\frac{b^2}{4\pi}\left(1-\sqrt{1+F}\right) = 0 - \frac{b^2}{4\pi}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{b^2}\vec{B}'^2}\right) \\ &= \frac{b^2}{4\pi}\left(\sqrt{1+\frac{g^2}{b^2}\frac{1}{r^4}}-1\right) = \frac{b^2}{4\pi}\left(\sqrt{1+\frac{r_0^4}{r^4}}-1\right) = \frac{b^2}{4\pi}\frac{\sqrt{r_0^4+r^4}-r^2}{r^2},\end{aligned}$$

што се уопште не разликује од (2.39). Даље се интеграција врши на потпуно исти начин као у одељку 2.2, и резултат је (упореди (2.40)):

$$E = \frac{g^2}{r_0}\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{3\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} \equiv g^2\sqrt{\frac{b}{g}}\,\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{3\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} \simeq g^2\sqrt{\frac{b}{g}}\cdot 1.236.$$

Дакле, закључујемо да електростатички и магнетостатички сингуларитети имају исту (коначну!) укупну енергију, до на разлику у набојима. Ово је заправо очекиван[15] резултат, јер је укупна енергија константа за дати сингуларитет, па се трансформацијом симетрије неће променити.

Може се поставити питање шта ако изаберемо неки други параметар ротације α уместо $-\frac{\pi}{2}$. У том случају се добије сингуларитет који је истовремено и наелектрисан и намагнетисан, у зависности од вредности α. Таква решења једначина динамике се зову *диони*[16], и занимљиви су за изучавање зато што играју важну улогу у теорији струна.

Споменимо овде још и интересантан куриозитет да је Max Born напустио ову теорију баш зато што предвиђа постојање магнетних монопола, за које он није веровао да постоје.

[13] Наравно, теорија би могла предвиђати постојање монопола и ако не би била дуално симетрична, али то би био куриозитет, и не би било везано за постојање електростатичког сингуларитета.

[14] Ознаку за намагнетисање не треба бркати са детерминантом метричког тензора!

[15] Формално гледано, ово је последица инваријантности тензора енергије–импулса на дуалне трансформације.

[16] Енгл. dyon.

Глава 4

ЗАКЉУЧАК

Као теорија која претендује да опише електромагнетне феномене, Born-Infeldова електродинамика има следеће предности над Maxwellовом теоријом:

- обезбеђује конвергенцију укупне енергије електромагнетног поља тачкасте честице;
- омогућава интерпретацију [1, 2] елементарних честица као сингуларних решења једначина динамике *вакуума*, тј. даје честицама електромагнетну структуру и порекло;
- у лимесу слабих поља своди се на Maxwellову теорију и садржи све ефекте који су њом предвиђени, укључујући све досад познате експерименталне чињенице који иду у прилог Maxwellовој електродинамици;
- поседује дуалну симетрију и на природан начин предвиђа постојање магнетних монопола и диона;
- предвиђа брзину простирања светлости у вакууму која *не зависи* од облика поларизације, тј. представља једину нелинеарну теорију [2] у којој нема birefringence ефекта;
- може да има велику примену и у електродинамици материјалних средина.

Наравно, поседује и одређене мане, које су углавном цена за горе наведене предности, и последица су њене нелинеарности:

- принцип суперпозиције поља не важи (осим у Maxwellовом лимесу);
- поступак евентуалне квантизације је значајно закомпликован;
- број проблема који се могу егзактно решити је веома мали;
- појављује се параметар теорије, b, за који нема експерименталних података о нумеричкој вредности;
- нема структуру која је довољно богата да опише *све* елементарне честице као електромагнетне сингуларитете;
- предвиђа постојање магнетних монопола (ово се може сматрати у једнакој мери маном као и предношћу).

У новијим теоријским истраживањима [3, 5, 6] Born-Infeldов лагранжијан се јавља као део ефектовног лагранжијана отворених суперструна, куплован са другим пољима. У овом случају се јављају три нова битна момента:

- параметар b је на природан начин фиксиран другим константама које се јављају у теорији;

- поље $F_{\mu\nu}$ има више степени слободе него што би се очекивало у електродинамици;
- теорија није затворена, тј. јављају се нове математичке структуре чије дефинисање није једнозначно.

Ове чињенице имају следеће последице (неке добре, а неке лоше):

- уклања се недостатак произвољности параметра b;
- теорији се не може без допунских разматрања и претпоставки приписати смисао електродинамике, због вишка броја степени слободе;
- теорија постаје неједнозначна, тј. јавља се у више верзија, у зависности од тога како се дефинишу контракција (траг) и детерминанта по осталим степенима слободе тензора $F_{\mu\nu}$.

У особине које су везане за теорију суперструна у овом раду нисмо улазили, пре свега због компликованости саме теорије. Но, овде те особине наводимо да бисмо истакли због чега је Born-Infeldова теорија данас занимљива за изучавање, пре свега по свом математичком садржају, јер је физичка интерпретација нејасна. Електромагнетна дуална симетрија [5, 6] у том смислу такође игра веома важну улогу у теорији суперструна, заједно са осталим симетријама које се тамо јављају.

Додатак А

ИНВАРИЈАНТЕ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНОГ ПОЉА

У овом додатку доказујем једну теорему о облику скаларних инваријанти које се могу изградити од компоненти електромагнетног поља.

Фиксирајмо кооординатни систем у коме је $(g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu})$, и запишимо експлицитно у матричном[1] облику компоненте тензора $F^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu}$ и $\star F^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\eta_{\nu\alpha}\varepsilon^{\mu\alpha\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$:

$$F \stackrel{\text{деф}}{=} [F^{\mu}{}_{\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}, \qquad \star F \stackrel{\text{деф}}{=} [\star F^{\mu}{}_{\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ B_x & 0 & -E_z & E_y \\ B_y & E_z & 0 & -E_x \\ B_z & -E_y & E_x & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{(A.1)}$$

Лема 1. *Матрице F и $\star F$ комутирају:*

$$[F, \star F] \equiv F \star F - \star F F = 0.$$

Доказ. Директним израчунавањем производа $F \star F$ и $\star F F$ добија се:

$$F \star F = (\vec{E} \cdot \vec{B}) I_{4\times4}, \qquad \star F F = (\vec{E} \cdot \vec{B}) I_{4\times4},$$

(такође, види једначину (2.19)) где је $I_{4\times4}$ јединична матрица димензије 4×4. Одузимањем следи $[F, \star F] = 0$. Крај доказа.

Лема 2. *Сваки скалар I, конструисан искључиво помоћу компоненти тензора електромагнетног поља $F_{\mu\nu}$, метрике $g_{\mu\nu}$ и тензора* Levi-Civita *$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, може се записати у облику:*

$$I = \mathrm{tr}\left(F^m \star F^n\right), \qquad (m, n \in \mathbb{N}_0)$$

или као нека функција једног или више таквих трагова:

$$I = f\ (\ \mathrm{tr}(F^m \star F^n)\ ,\ \mathrm{tr}(F^k \star F^l)\ ,\ \mathrm{tr}(F^r \star F^s)\ ,\ \ldots). \qquad (m, n, k, l, r, s, \ldots \in \mathbb{N}_0)$$

Доказ. Пошто је I по претпоставци скалар (тј. тензор нултог реда) конструисан помоћу компоненти електромагнетног поља, метрике и тензора Levi-Civita, јасно је да се он може представити

[1] За потребе овог одељка ознаку F користимо да означимо матрицу чије су компоненте $F^{\mu}{}_{\nu}$. То никако не треба бркати са бројем $F = \frac{I_1}{b^2}$ дефинисаним првом једначином у (2.3), који се у овом одељку неће јављати.

као нека функција поменутих компоненти, при чему су све оне међусобно контраховане, јер у скалару не сме бити слободних индекса.

Посматрајмо произвољано задати скалар облика:

$$I = F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \dots g^{\gamma\delta} g^{\rho\sigma} \dots \varepsilon^{\zeta\xi\lambda\chi} \dots , \tag{A.2}$$

при чему се сви индекси појављују у паровима (једном горе и једном доле), и по свима њима се сумира. Најпре, све g–факторе можемо искористити за подизање или спуштање одговарајућих индекса и "утопити" их у величине ${F^{\mu}}_{\nu}$, ${\varepsilon_{\alpha\beta}}^{\rho\sigma}$ и сл., тако да се метрички тензор нигде не појављује експлицитно. Даље, пошто сада у изразу фигуришу само F–ови и ε симболи и пошто су и једни и други антисиметрични на замену места индексима, све ε можемо избацити из израза замењујући контракције типа $\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ са $\star F^{\mu\nu}$. Након овога у изразу фигуришу само F–ови и $\star F$–ови, са контрахованим индексима (и нумеричким коефицијентом испред, који није битан за анализу). Пошто се сваки индекс појављује тачно двапут, и пошто су и F и $\star F$ анстисиметрични на замену индекса, могу се међусобно искомутирати тако да се сви индекси појављују "надовезани", тј. у облику:

$$I = C \; F_{\mu\nu} \star {F^{\nu}}_{\alpha} \star F^{\alpha\rho} F_{\rho\beta} \dots {F_{\xi}}^{\mu}, \qquad (C \in \mathbb{R})$$

(сви осим првог, μ, који се појављује на почетку и на крају израза). Коначно, опет пошто се по свим индексима сумира, можемо их по вољи дизати и спуштати у паровима (тј. ако једног дигнемо, његовог парњака морамо да спустимо; по конструкцији скалара, један од њих је увек горе, а други доле), па тако трансформисати израз у облик:

$$I = C \; {F^{\mu}}_{\nu} \star {F^{\nu}}_{\alpha} \star {F^{\alpha}}_{\rho} {F^{\rho}}_{\beta} \dots {F^{\xi}}_{\mu},$$

што се може записати у матричном облику као:

$$I = C \;\; \mathrm{tr}(F \star F \star F F \dots F).$$

Константа C се (погодним редефинисањем скалара I) може елиминисати, па имамо:

$$I = \mathrm{tr}(F \star F \star F F \dots F).$$

Према леми 1, матрице F и $\star F$ комутирају, па наш скалар добија коначан облик:

$$I = \mathrm{tr}(F^m \star F^n), \qquad (m, n \in \mathbb{N}_0) \tag{A.3}$$

(овде су m и n бројеви појављивања матрица F и $\star F$ под трагом). Тиме смо доказали да се сваки израз облика (A.2) може записати у облику (A.3).

Сада је јасно да је сваки скалар који се може конструисати од $F_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ и $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ заправо нека функција разних величина облика (A.2) у разним комбинацијама (зато што се по претпоставци састоји само од ових тензора, а по свим индексима се мора сумирати), па следи да је тај скалар заправо функција трагова облика (A.3) и ничега више. Обратно, свака функција само ових трагова је скалар, по закону количника. Дакле, свака инваријанта се може записати у облику:

$$I = f \; (\; \mathrm{tr}(F^m \star F^n) \; , \; \mathrm{tr}(F^k \star F^l) \; , \; \mathrm{tr}(F^r \star F^s) \; , \; \dots \;). \qquad (m, n, k, l, r, s, \dots \in \mathbb{N}_0)$$

Крај доказа.

Теорема. *Свака инваријанта I електромагнетног поља је нека функција две основне инваријанте, $I_1 = \vec{B}^2 - \vec{E}^2$ и $I_2 = \vec{E} \cdot \vec{B}$:*

$$I = \Phi \; (\; I_1 \; , \; I_2 \;) \equiv \Phi \; (\; \vec{B}^2 - \vec{E}^2 \; , \; \vec{E} \cdot \vec{B} \;).$$

Доказ. Делимо доказ на три корака.

Корак 1.

Нека су I_1 и I_2 инваријанте задате као у формулацији теореме. Својствени полином матрице F означићемо као $p_F(x)$. Директним израчунавањем, на основу (A.1), добијамо:

$$p_F(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \det(F - xI_{4\times 4}) = x^4 + I_1 x^2 - I_2^2.$$

Својствене вредности матрице F су нуле овог полинома, и пошто је у питању биквадратна једначина, могу се експлицитно израчунати, али нам оне сада не требају.

На основу познатог Cayley-Hamiltonовог става[2] из линеарне алгебре, матрица F анулира свој својствени полином:

$$F^4 + I_1 F^2 - I_2^2 I_{4\times 4} = 0,$$

што се може преписати у облику:

$$F^4 = -I_1 F^2 + I_2^2 I_{4\times 4}. \tag{A.4}$$

Множењем последње једначине матрицом F добијамо:

$$F^5 = -I_1 F^3 + I_2^2 F,$$

док још једним множењем следи, због (A.4),

$$F^6 = -I_1 F^4 + I_2^2 F^2 = (I_1^2 + I_2^2)F^2 - I_1 I_2^2 I_{4\times 4}.$$

Интуитивно се види, а индукцијом се лако може показати да важи:

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}_0) \qquad F^n = a'_n(I_1, I_2)F^3 + b'_n(I_1, I_2)F^2 + c'_n(I_1, I_2)F + d'_n(I_1, I_2)I_{4\times 4}, \tag{A.5}$$

где су a'_n, b'_n, c'_n и d'_n неке функције инваријанти I_1 и I_2.

Корак 2.

Једним погледом на матрице (A.1) видимо да се $\star F$ сменом $\vec{B}' = \vec{E}$, $\vec{E}' = -\vec{B}$ може алгебарски свести на F. Увођењем смене следи и $I'_1 = -I_1$, $I'_2 = -I_2$. Тада одмах следи:

$$p_{\star F}(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \det(\star F - xI_{4\times 4}) = x^4 - I_1 x^2 - I_2^2.$$

Сада се (*mutatis mutandis*) истоветним резоновањем стиже до једначине:

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}_0) \qquad \star F^n = a''_n(I_1, I_2) \star F^3 + b''_n(I_1, I_2) \star F^2 + c''_n(I_1, I_2) \star F + d''_n(I_1, I_2)I_{4\times 4}. \tag{A.6}$$

И овде су a''_n, b''_n, c''_n и d''_n поново неке функције инваријанти I_1 и I_2 (различите од одговарајућих функција за F, јер својствени полином има другачији облик).

Корак 3.

Пошто је tr линеаран оператор, и имајући у виду једначине (A.5) и (A.6), имамо:

$$\begin{array}{rcllll}
\operatorname{tr}(F^m \star F^n) & = & a'_m a''_n \operatorname{tr}(F^3 \star F^3) & + \; a'_m b''_n \operatorname{tr}(F^3 \star F^2) & + \; a'_m c''_n \operatorname{tr}(F^3 \star F) & + \; a'_m a''_n \operatorname{tr}(F^3) \\
& + & b'_m a''_n \operatorname{tr}(F^2 \star F^3) & + \; b'_m b''_n \operatorname{tr}(F^2 \star F^2) & + \; b'_m c''_n \operatorname{tr}(F^2 \star F) & + \; b'_m a''_n \operatorname{tr}(F^2) \\
& + & c'_m a''_n \operatorname{tr}(F \star F^3) & + \; c'_m b''_n \operatorname{tr}(F \star F^2) & + \; c'_m c''_n \operatorname{tr}(F \star F) & + \; c'_m a''_n \operatorname{tr}(F) \\
& + & d'_m a''_n \operatorname{tr}(\star F^3) & + \; d'_m b''_n \operatorname{tr}(\star F^2) & + \; d'_m c''_n \operatorname{tr}(\star F) & + \; d'_m a''_n \operatorname{tr}(I_{4\times 4}).
\end{array}$$

На десној страни имамо 16 трагова које рачунамо директним множењем датих матрица (A.1). Резултати су:

$$\begin{array}{lcllcllcl}
\operatorname{tr}(F^3 \star F^3) & = & 4I_2^3, & \operatorname{tr}(F^3 \star F) & = & -2I_1 I_2, & \operatorname{tr}(F^2 \star F^2) & = & 4I_2^2, \\
\operatorname{tr}(F \star F^3) & = & 2I_1 I_2, & \operatorname{tr}(F \star F) & = & 4I_2, & \operatorname{tr}(\star F^2) & = & 2I_1, \\
\operatorname{tr}(F^2) & = & -2I_1, & \operatorname{tr}(I_{4\times 4}) & = & 4, & & &
\end{array}$$

[2] Cayley-Hamiltonов став тврди да свака квадратна матрица A димензије $n \times n$ анулира свој својствени полином:

$$p_A(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \det(A - xI_{n\times n}) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_A(A) \equiv a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 I_{n\times n} = 0.$$

Доказ се може наћи у сваком озбиљнијем уџбенику линеарне алгебре, рецимо [9].

а осталих осам трагова су једнаки нули. Пошто су сви трагови функције само од I_1 и I_2, а такође и коефицијенти $a'_m a''_n$, $a'_m b''_n$, $\ldots$, закључујемо да је лева страна такође функција само ове две инваријанте, за произвољне степене m и n:

$$(\forall\, m, n \in \mathbb{N}_0) \qquad \mathrm{tr}(F^m \star F^n) = \phi\ (\ I_1\ ,\ I_2\ ).$$

Коначно, на основу леме 2, свака скаларна инваријанта електромагнетног поља је функција само оваквих трагова, па следи да се свака инваријанта I може записати као функција I_1 и I_2:

$$I = \Phi\ (\ I_1\ ,\ I_2\ ) \equiv \Phi\ (\ \vec{B}^2 - \vec{E}^2\ ,\ \vec{E}\cdot\vec{B}\ ).$$

Крај доказа.

Литература

[1] M. Born and L. Infeld, "Foundations of the New Field Theory", *Proc. Roy. Soc.*, London **A144:** 425 (1934).

[2] I. Bialynicki-Birula, "Nonlinear Electrodynamics: Variations on a Theme by Born and Infeld", in *Quantum Theory of Fields and Particles*, edited by Jancewicz and J. Lukierski, *World Scientific*, Singapore (1983).

[3] A. A. Tseytlin, "Born-Infeld Action, Supersymmetry and String Theory", preprint `hep-th/9908105` `Imperial/TP/98-99/67`, (1999).

[4] S. Flüge, "Encyclopedia of Physics, Volume III/1: Principles of Classical Mechanics and Field Theory", *Springer–Verlag*, Berlin (1960).

[5] G. W. Gibbons and D. A. Rasheed, "Electric-Magnetic Duality Rotations in Non-Linear Electrodynamics", preprint `hep-th/9506035 v2` (1995).

[6] M. K. Gaillard and B. Zumino, "Nonlinear Electromagnetic Self-Duality and Legendre Transformations", preprint `LBNL-41110`, `UCB-PTH-97/58`, `hep-th/9712103` (1997).

[7] T. P. Cheng, L. F. Li, "Gauge Theory of Elementary Particle Physics", *Oxford University Press*, New York (1989).

[8] J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics" (second edition), *John Wiley & Sons Inc.*, New York (1974).

[9] M. Drešević, "Elementi linearne algebre", *KIZ Kultura*, Beograd (1995).